Решение варианта 1

1. *(7 баллов)* Баржа проехала по озеру пять километров за первые 40 мин. Следующий час она двигалась со скоростью 9 км/ч, а оставшиеся 6 км пути – со скоростью 18 км/ч. Какова средняя скорость баржи за первую половину времени её движения? Ответ дайте в километрах в час (км/ч). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение.

Все время движения T = 2 ч. Тогда за первый час она прошла расстояние $S = 5 + 9 \cdot \frac{1}{3} = 8$ км.

$v_{cp} = \frac{2S}{T} = 8$ км/ч.

Ответ. 8 (7,91-8,09 – 0,9 балла; 7,7-8,2 – 0,5 балла)

2.. *(7 баллов)* У планеты X есть два спутника, массы которых относятся как 1:2. В некоторый момент времени один спутник, больший по массе, оказался в точке A, другой спутник – в точке B, а планета – в точке C. При этом угол ACB равен 75°, угол CAB равен 60°. Определите отношение сил притяжения планетой X большего и меньшего спутников соответственно. Считайте, что размеры планеты X и спутников малы по сравнению с расстояниями между этими космическими объектами. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Обозначим: m_1 – массу большего спутника, находящегося в точке A, а m_2 – массу меньшего спутника, находящегося в точке B, M – массу планеты, находящейся в точке C; r_1 = AC, r_2 = BC; $\angle ACB = \gamma = 75^\circ$, $\angle CAB = \beta = 60^\circ$. Тогда $\angle CBA = \alpha = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$. Отношение сил притяжения равно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\frac{m_1 M}{r_1^2}}{G\frac{m_2 M}{r_2^2}} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}\right)^2 = 3.$$

Ответ. 3 (2,91-3,09 – 0,9 балла; 0,32-0,34 – 0,5 балла)

3. *(7 баллов)* Пиратский корабль непрерывно палит из пушек с обоих бортов. На правом борту закреплены N_1 = 60 пушек, каждый снаряд которых имеет массу m_1 = 10 кг и скорость вылета v_1 = 200 м/с каждый. На левом борту закреплены N_2 = 20 пушек, но со снарядами побольше – масса каждого снаряда m_2 = 50 кг, а скорость v_2 = 150 м/с. Каждая пушка правого борта делает n_1 = 4 выстрела в минуту, левого – n_2 = 2 выстрела в минуту. Снаряды вылетают в горизонтальном направлении. Все выстрелы производят перпендикулярно ходу корабля. Найдите среднюю силу, действующую на корабль в горизонтальном направлении. Ответ дайте в килоньютонах (кН). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Запишем закон изменения импульса корабля в направлении перпендикулярном направлению движения за большое время Δt.

$$F_x\Delta t = m_1v_1N_1n_1\Delta t - m_2v_2N_2n_2\Delta t\,, \Rightarrow\ F = \left|m_1v_1N_1n_1 - m_2v_2N_2n_2\right| = 3\text{ кН.}$$

Замечание. В формулу следует подставлять n_1 = 4/60 $с^{-1}$ и n_2 = 2/60 $с^{-1}$.

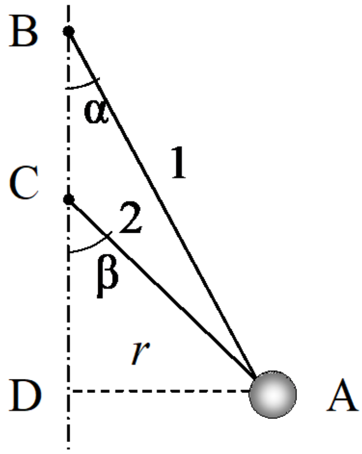
Ответ. 3 (2,88-3,06 – 0,9 балла; 2,7-3,9; 3000, 180 – 0,5 балла)

4. *(11 баллов)* Неопознанный летающий объект (НЛО), который неподвижно висел над землей, вдруг начал двигаться с постоянным ускорением по прямой и в течение времени τ достиг скорости v = 100 м/с. Затем его ускорение упало до нуля, а НЛО продолжил движение в том же направлении с той же скоростью и спустя время 2τ после начала движения внезапно исчез. Чему равна средняя скорость НЛО на первой половине пути? Ответ дайте в метрах в секунду (м/с), округлив его до целых.

Решение. Пусть *a* – ускорение НЛО, тогда достигнутая скорость $v = a\tau$. Весь путь, пройденный НЛО за время 2τ равен $S = \dfrac{v(2\tau+\tau)}{2} = \dfrac{3v\tau}{2}$. Найдем время t_0, за которое НЛО пройдет первую половину пути. $\dfrac{S}{2} = \dfrac{v\left(t_0 + (t_0-\tau)\right)}{2}$. $\Rightarrow t_0 = \dfrac{5\tau}{4}$. Тогда $v_{ср} = \dfrac{S/2}{t_0} = \dfrac{3}{5}v = 60$ м/с.

Ответ. 60 (55-64 – 0,5 балла)

5. *(11 баллов)* Маленький шарик А, подвешенный на двух нитях к вертикальной оси BD, вращается в горизонтальной плоскости вокруг этой оси (смотри рисунок). Нить 1, прикрепленная в точке В к оси вращения, составляет с ней угол α = arcsin(0,6). Нить 2, прикрепленная в точке С к оси вращения, составляет с осью угол β = π/2 – α. Радиус вращения r = AD = 0,44 м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Определите угловую скорость вращения шарика, если нити при вращении натянуты, и сила натяжения нити 2 в два раза больше, чем сила натяжения нити 1. Ответ дайте в радианах в секунду (рад/с). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.



Решение. Обозначим: *m* – массу шарика, T_1 и T_2 = 2 T_1 – силы натяжения нитей 1 и 2. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат.

$$\begin{cases} T_1\sin\alpha + 2T_1\sin\beta = m\omega^2 r, \\ T_1\cos\alpha + 2T_1\cos\beta = mg. \end{cases} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin\alpha + 2\sin\beta}{\cos\alpha + 2\cos\beta}} = 5\text{ рад/с.}$$

Ответ. 5 (4,91-5,09 – 0,9 балла; 4,6-5,4 – 0,5 балла)

6. *(11 баллов)* На гладкой горизонтальной поверхности находятся две тележки массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг, соединенные невесомой пружиной жесткости k = 50 Н/м, при этом тележка массой m_2 стоит вплотную к вертикальной стене. Тележку массой m_1, удерживают так, что пружина оказывается сжатой, величина деформации пружины равна x_0 = 10 см. Тележку m_1 отпускают без толчка. Определите скорость центра масс системы после того как обе тележки придут в движение. Ответ дайте в метрах в секунду (м/с). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Найдем скорость тележки 1 v_1, в момент, когда пружина окажется недеформированной.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{k x_0^2}{2}. \Rightarrow v_1 = x_0\sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Тогда скорость центра масс системы равна

$$v_{цм} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{x_0\sqrt{k m_1}}{m_1 + m_2} = 0.2 \text{ м/с.}$$

Ответ. 0,2 (0,15-0,24; 20 –0,5 балла)

7. *(15 баллов)* Мальчик бросает с высокого обрыва камень с горизонтально направленной скоростью v_0 = 10 м/с. Затем по траектории камня мальчик запускает управляемый дрон, который движется с постоянной скоростью u = 20 м/с. Какое ускорение имеет дрон в точке, находящейся на h = 15 м ниже точки броска? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ дайте в м/с^2. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Посчитаем радиус кривизны параболы, по которой движется камень, в искомой точке. Для этого запишем выражение для нормального ускорения камня. $a_n = \frac{v^2}{R} = g\cos\varphi = g\frac{v_x}{v} = g\frac{v_0}{v}$, где φ – угол, который образует вектор скорости камня $\vec{v}$ с горизонтальной осью x, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ – скорость камня в искомой точке. $\Rightarrow$ $R = \frac{v^3}{g v_0}$. Тогда ускорение дрона равно

$$a = \frac{u^2}{R} = \frac{u^2 g v_0}{\left(v_0^2 + 2gh\right)^{\frac{3}{2}}} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. 5 (4,9-5,1 – 0,9 балла)

8. *(15 баллов)* На гладкой горизонтальной поверхности находится груз, к которому прикреплена однородная массивная пружина. К этой механической системе приложены противоположно направленные горизонтальные силы: F_1 = 20 Н и F_2 = 10 Н (см. рисунок). Массы груза и пружины равны. Коэффициент жесткости пружины k = 500 Н/м. Определите величину деформации пружины в процессе движения системы. В процессе движения пружина остается горизонтальной. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ дайте в сантиметрах (см), округлив его до десятых.

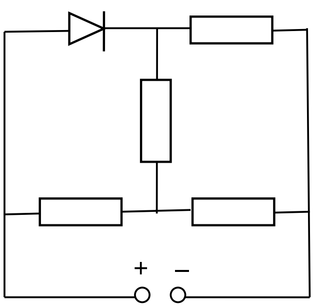
Решение. Обозначим массу груза и массу пружины *m*. Тогда ускорение системы $a = \dfrac{F_1 - F_2}{2m}$.

Разобьем пружину на большое количество *N* одинаковых маленьких кусочков (например, один кусочек пружины – один виток), жесткость каждого такого кусочка равна *kN*. Пронумеруем кусочки как i = 1, 2, …, *N*, начиная с конца пружины, к которому приложена сила F_1. Пусть T_i – сила упругости, действующая на *i* кусочков. Тогда $F_1 - T_i = \dfrac{mi}{N}a = \dfrac{(F_1 - F_2)}{2N}i$. $\Rightarrow T_i = F_1 - \dfrac{(F_1 - F_2)}{2N}i$. Растяжение пружины $x = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{T_i}{kN}$. $\Rightarrow$

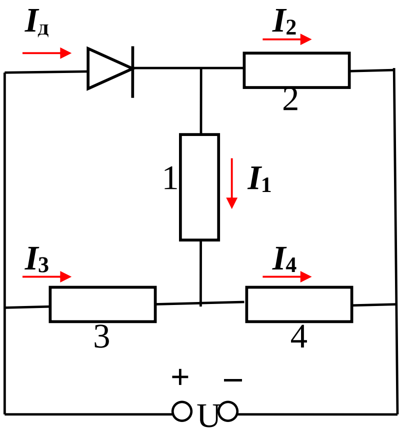
$x = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{F_1}{kN} - \sum_{i=1}^{N} \dfrac{(F_1 - F_2)}{2kN^2} i$. Воспользуемся тем, что $\sum_{i=1}^{N} i = \dfrac{N(N+1)}{2} \approx \dfrac{N^2}{2}$, при $N \gg 1$. Тогда $x = \dfrac{3F_1 + F_2}{4k} = 0{,}035$ м = 3,5 см.

Ответ. 3,5 (3,4-3,6 – 0,9 балла)

9. *(16 баллов)* Четыре одинаковых резистора сопротивлением R = 10 кОм каждый и идеальный диод соединены в электрическую цепь и подключены к идеальному источнику тока напряжением U = 9 В, как показано на рисунке. Чему равна сила тока, протекающего через диод? Ответ дайте в миллиамперах (мА), округлив его до десятых. Идеальный диод имеет нулевое сопротивление для тока, протекающего по нему в направлении «стрелки», и представляет собой бесконечное сопротивление, если ток по нему течет в противоположном направлении.



Решение. Обозначим токи в цепи, как на рис. Тогда



$$I_3R = I_1R, \Rightarrow I_3 = I_1.$$

$$I_4 = I_3 + I_1 = 2I_1.$$

$$I_3R + I_4R = U, \Rightarrow 3I_1R = U, \Rightarrow I_1 = \frac{U}{3R}.$$

$$I_2R = U, \Rightarrow I_2 = \frac{U}{R}.$$

$$I_д = I_1 + I_2 = \frac{U}{3R} + \frac{U}{R} = \frac{4U}{3R} = 1{,}2\text{ мА}.$$

Ответ. 1,2 (1,1-1,3 – 0,9 балла)

Решение варианта 2

1. *(7 баллов)* За первые 40 мин всадник проехал восемь километров. Следующий час он передвигался со скоростью 9 км/ч, а оставшиеся 5 км пути – со скоростью 10 км/ч. Определите среднюю скорость всадника на первой половине его пути? Ответ дайте в километрах в час (км/ч). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Весь путь равен S = 22 км. Время прохождения первой половины пути $t = \frac{2}{3}ч + \frac{11км - 8км}{9км/ч} = 1ч$. $v_{ср} = \frac{S}{2t} = 11$ км/ч.

Ответ. 11 (10,91-11,09 – 0,9 балла; 10,4-11,5 – 0,5 балла)

2. *(7 баллов)* У некоторой звезды X были обнаружены две планеты P1 и P2. В момент наблюдения планета P1, большая по массе, оказалась в точке A, планета P2 – в точке B, а звезда X – в точке C. При этом угол ABC равен 30°, угол ACB равен 105°. Отношение сил, с которыми звезда X притягивает планеты P1 и P2 соответственно, равно 3. Определите отношение массы планеты P1 к массе планеты P2. Считайте, что размеры звезды и ее планет малы по сравнению с расстояниями между этими космическими объектами. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Обозначим: m_1 – массу большей планеты, находящейся в точке A, а m_2 – массу меньшей планеты, находящейся в точке B, M – массу звезды, находящейся в точке C; r_1 = AC, r_2 = AB; $\angle ACB = \gamma = 105^\circ$, $\angle ABC = \alpha = 30^\circ$. Тогда $\angle BAC = \beta = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$.

Отношение сил притяжения равно $\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\frac{m_1 M}{r_1^2}}{G\frac{m_2 M}{r_2^2}} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 \Rightarrow$

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 = 3\cdot\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}\right)^2 = 1{,}5.$$

Ответ. 1,5 (1,41-1,59 – 0,9 балла; 0,66-0,68 – 0,5 балла)

3. *(7 баллов)* По вертикально расположенной стенке стреляют металлическими шариками массой m = 10 г каждый. Шарики подлетают почти перпендикулярно стенке со скоростью v_1 = 700 м/с и отскакивают от стенки также почти перпендикулярно со скоростью v_2 = 500 м/с. Стрельбу производят с частотой n = 50 выстрелов в минуту. Найдите среднюю силу, действующую на стенку в процессе стрельбы. Ответ дайте в ньютонах (Н). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Запишем закон изменения импульса шариков в проекции на ось, перпендикулярную стенке за большое время Δt.

$$F_x \Delta t = n\Delta t\left(mv_1 - (-mv_2)\right), \Rightarrow F = nm\left(v_1 + v_2\right) = 10 \text{ Н.}$$

Замечание. В формулу следует подставлять n = 50/60 $с^{-1}$.

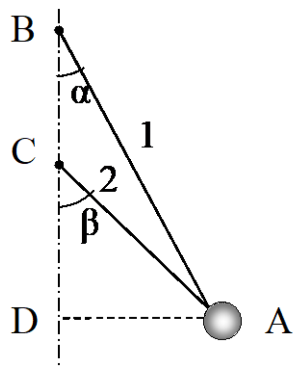
Ответ. 10 (9,91-10,09 – 0,9 балла; 9,6-10,3; 600, 10000 – 0,5 балла)

4. *(11 баллов)* Неопознанный летающий объект (НЛО), который неподвижно висел над землей, вдруг начал двигаться с постоянным ускорением по прямой и в течение времени τ прошел путь s = 100 м. После этого его ускорение упало до нуля, а НЛО продолжил движение в том же направлении. На какое расстояние сместился этот объект от начальной точки за время, равное 3τ/2 от начала движения? Ответ дайте в метрах (м), округлив его до целых.

Решение. Пусть *a* – ускорение НЛО, тогда за время τ он прошел путь $s = \dfrac{a\tau^2}{2}$ и достиг скорости $v = a\tau$. Весь путь, пройденный НЛО за время 3τ/2 равен $S_1 = S + \dfrac{v\tau}{2} = 2S = 200$ м.

Ответ. 200 (195-204 – 0,5 балла)

5. *(11 баллов)* Маленький шарик A массой m = 0,5 кг, подвешенный на двух нитях к вертикальной оси BD, вращается вокруг этой оси в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω = 6 рад/с, при этом AD – радиус вращения (смотри рисунок). Нить 1, прикрепленная в точке B к оси вращения, составляет с ней угол α, а нить 2, прикрепленная в точке C к оси вращения, составляет с осью угол β = 2α. BD = h =0,5 м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Определите силу натяжения нити 2. Ответ дайте в ньютонах (Н). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.



Решение. Обозначим: AD = *r* – радиус вращения, T_1 и T_2 – силы натяжения нитей 1 и 2. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат.

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 r, \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = mg. \end{cases} \Rightarrow T_2 = \frac{m(\omega^2 r\cos\alpha - g\sin\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

С учетом того, что β = 2α.

$$T_2 = \frac{m(\omega^2 r\cos\alpha - g\sin\alpha)}{\sin\alpha} = m(\omega^2 r \operatorname{ctg}\alpha - g) = m(\omega^2 h - g) = 4 \text{ Н.}$$

Ответ. 4 (3,91-4,1 – 0,9 балла; 3,8-4,2 – 0,5 балла)

6. *(11 баллов)* На гладкой горизонтальной поверхности находятся две тележки массами m_1 = 5 кг и m_2 = 4 кг, соединенные невесомой пружиной, при этом тележка массой m_2 стоит вплотную к вертикальной стене. Тележку массой m_1, удерживают так, что пружина оказывается сжатой, величина деформации пружины равна x_0 = 30 см. Тележку m_1 отпускают без толчка. Определите максимальную деформацию пружины после того как обе тележки придут в движение. Ответ дайте в сантиметрах (см). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Найдем скорость тележки 1 v_1, в момент, когда пружина окажется недеформированной.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{k x_0^2}{2}. \Rightarrow v_1 = x_0 \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

После этого обе тележки движутся по поверхности. Максимальная деформация пружины будет, когда скорости тележек равны и направлены в одну сторону. Обозначим скорость тележек в этот момент u, а деформацию пружины x_1. Тогда

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u, \\ \dfrac{k x_0^2}{2} = \dfrac{k x_1^2}{2} + \dfrac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}} = 0{,}2 \text{ м} = 20 \text{ см}$$

Ответ. 20 (19-21, 0,2 – 0,5 балла)

7. *(15 баллов)* Мальчик бросает с поверхности земли камень с начальной скоростью v_0 = 14 м/с, направленной под углом α = 60° к горизонту. Затем по траектории движения камня мальчик запускает управляемый дрон, который движется с постоянной скоростью u = 10 м/с. Какое ускорение имеет дрон в точке, находящейся на высоте h = 4,8 м, отсчитанной от уровня броска? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ дайте в м/с^2. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Посчитаем радиус кривизны параболы, по которой движется камень, в искомой точке. Для этого запишем выражение для нормального ускорения камня. $a_n = \dfrac{v^2}{R} = g\cos\varphi = g\dfrac{v_x}{v}$, где φ – угол, который образует вектор скорости камня $\vec{v}$ с горизонтальной осью x, $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ – скорость камня в искомой точке. $\Rightarrow$ $R = \dfrac{v^3}{g v_0}$. Тогда ускорение дрона равно

$$a = \frac{u^2}{R} = \frac{u^2 g v_0 \cos\alpha}{\left(v_0^2 - 2gh\right)^{\frac{3}{2}}} = 7 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. 7 (6,9-7,1 – 0,9 балла)

8. *(15 баллов)* На горизонтальной поверхности находится груз, к которому прикреплена однородная массивная пружина, коэффициент жесткости которой k = 50 Н/м. К пружине приложена горизонтально направленная сила F = 3 Н (см. рисунок). Массы груза равна массе пружины и равна m = 1 кг. Коэффициент трения между грузом и поверхностью μ = 0,1. Определите величину деформации пружины в процессе движения системы. В процессе движения пружина остается горизонтальной. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ дайте в сантиметрах (см), округлив его до десятых.

Решение. Обозначим массу груза и массу пружины *m*. Тогда ускорение системы $a = \dfrac{F - \mu mg}{2m}$.

Разобьем пружину на большое количество *N* одинаковых маленьких кусочков (например, один кусочек пружины – один виток), жесткость каждого такого кусочка равна *kN*. Пронумеруем кусочки как *i* = 1, 2, …, *N*, начиная с конца пружины, к которому приложена сила *F*. Пусть T_i – сила упругости, действующая на *i* кусочков. Тогда $F - T_i = \dfrac{mi}{N}a = \dfrac{(F - \mu mg)}{2N}i$. $\Rightarrow$

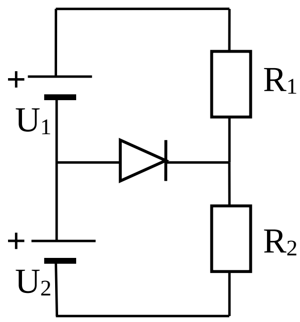
$T_i = F - \dfrac{(F - \mu mg)}{2N}i$. Растяжение пружины $x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{T_i}{kN}$. $\Rightarrow$

$x = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{F}{kN} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(F - \mu mg)}{2kN^2}i$. Воспользуемся тем, что $\sum\limits_{i=1}^{N} i = \dfrac{N(N+1)}{2} \approx \dfrac{N^2}{2}$, при $N \gg 1$.

Тогда $x = \dfrac{3F + \mu mg}{4k} = 0{,}05$ м = 5 см.

Ответ. 5 (4,8-5,2 – 0,9 балла)

9. *(16 баллов)* Электрическая цепь, изображенная на рисунке, содержит идеальные батарейки с напряжениями U_1 = 3 В и U_2 = 1,5 В, резисторы с сопротивлениями R_1 = 100 Ом и R_2 = 200 Ом и идеальный диод. Какое напряжение будет на диоде при таком включении его в электрическую цепь? Ответ дайте в вольтах (В), округлив его до десятых. Идеальный диод имеет нулевое сопротивление для тока, протекающего по нему в направлении «стрелки», и представляет собой бесконечное сопротивление, если ток по нему течет в противоположном направлении.



Решение.

При таком включении диода ток через него не идет. Поэтому ток течет только по внешнему контуру, и сила тока в нем равна $I = \dfrac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}$. Тогда напряжение на диоде $U = U_2 - IR_2 = \dfrac{U_2R_1 - U_1R_2}{R_1 + R_2} = -1{,}5$ В. Это означает, что диод закрыт. *За правильный ответ принимаются и положительное и отрицательное значения напряжения на диоде.*

Ответ. 1,5; –1,5 (1,4-1,6, –1,6-–1,4 – 0,9 балла)

Решение варианта 3

1. *(7 баллов)* За первые 30 мин баржа проехала по озеру девять километров. Следующий час она двигалась со скоростью 9 км/ч, а оставшиеся 6 км пути – со скоростью 18 км/ч. Какова средняя скорость баржи на второй половине её пути? Ответ дайте в километрах в час. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Весь путь равен S = 24 км. Время прохождения второй половины пути $t = \frac{6км}{18км/ч} + \frac{12км - 6км}{9км/ч} = 1ч$. $v_{ср} = \frac{S}{2t} = 12$ км/ч.

Ответ. 12 (11,91-12,09 – 0,9 балла; 11,3-12,6 – 0,5 балла)

2. *(7 баллов)* У планеты X есть два спутника, массы которых относятся как 1:3. В некоторый момент времени один спутник, больший по массе, оказался в точке A, другой спутник – в точке B, а планета – в точке C. Отношение сил, с которыми планета X притягивает больший и меньший по массе спутники соответственно, равно 2. Определите величину угла ACB в этот момент времени, если угол ABC оказался равным 60°. Считайте, что размеры планеты X и спутников малы по сравнению с расстояниями между этими космическими объектами. Ответ дайте в градусах, округлив его до целых.

Решение. Обозначим: m_1 – массу большего спутника, находящегося в точке A, а m_2 – массу меньшего спутника, находящегося в точке B, M – массу планеты, находящейся в точке C; r_1 = AC, r_2 = BC; $\angle ABC = \alpha = 60^\circ$, $\angle CAB = \beta$. Отношение сил притяжения равно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\frac{m_1 M}{r_1^2}}{G\frac{m_2 M}{r_2^2}} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2. \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \sin\alpha\sqrt{\frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{m_2}{m_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow \beta = 45^\circ, \Rightarrow \angle ACB = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ.$$

Ответ. 75 (71-79 – 0,9 балла; 45-45 – 0,5 балла)

3. *(7 баллов)* По вертикально расположенной стенке стреляют металлическими шариками массой m = 10 г каждый. Шарики подлетают к стенке со скоростью v = 600 м/с под углом α = 60° к нормали, проведенной от плоскости стенки. Стрельбу производят с частотой n = 40 выстрелов в минуту. Шарики упруго отскакивают от стенки (без потери скорости под тем же углом α к нормали). Найдите среднюю силу, действующую на стенку в процессе стрельбы. Ответ дайте в ньютонах (Н). Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Запишем закон изменения импульса шариков в проекции на ось, перпендикулярную стенке за большое время Δt.

$$F_x\Delta t = n\Delta t\left(mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)\right), \Rightarrow\ F = 2mvn\cos\alpha = 4\text{ Н.}$$

Замечание. В формулу следует подставлять n = 40/60 $с^{-1}$.

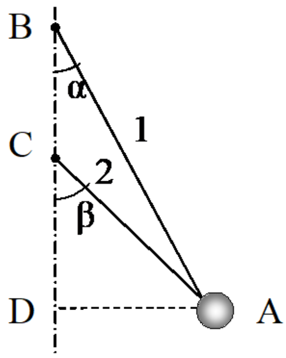
Ответ. 4 (3,91-4,09 – 0,9 балла; 3,6-4,3; 240, 4000 – 0,5 балла)

4. *(11 баллов)* Неопознанный летающий объект (НЛО), который неподвижно висел над землей, вдруг начал двигаться и в течение времени τ летел по прямой с постоянным ускорением a = 100 м/с^2. Затем его ускорение упало до нуля, а НЛО продолжил движение в том же направлении с постоянной скоростью, и спустя время 2τ после начала движения внезапно исчез. Наблюдатель заметил, что первую половину всего видимого пути объект прошел за 5 с. Какой максимальной скорости достиг НЛО? Ответ дайте в метрах в секунду (м/с), округлив его до целых.

Решение. Максимальная скорость $v = a\tau$. Весь путь, пройденный НЛО за время 2τ равен $S = \dfrac{v(2\tau+\tau)}{2} = \dfrac{3v\tau}{2}$. Время t_0 = 5 с, за которое НЛО пройдет первую половину пути можно связать с временем τ. $\dfrac{S}{2} = \dfrac{v\left(t_0 + (t_0 - \tau)\right)}{2}$. $\Rightarrow\ \tau = \dfrac{4}{5}t_0 = 4$ с. Тогда $v = a\tau = 400$ м/с.

Ответ. 400 (395-404 – 0,5 балла)

5. *(11 баллов)* Маленький шарик А подвешенный на двух нитях к вертикальной оси BD, вращается вокруг этой оси в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω = 6 рад/с, при этом AD – радиус вращения (смотри рисунок). Нить 1 прикреплена в точке B, а нить 2 – в точке C к оси вращения, при этом BC = CD = a =0,2 м. Длина нити 1 равна l_1 = 0,88 м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Определите отношение силы натяжения нити 2 к силе натяжения нити 1. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.



Решение. Обозначим: m – массу шарика, AD = r – радиус вращения, α и β – углы, которые составляют нити 1 и 2 с осью вращения, T_1 и T_2– силы натяжения нитей 1 и 2. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат.

$$\begin{cases} T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = m\omega^2 r, \\ T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta = mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \dfrac{m(g\sin\beta - \omega^2 r\cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ T_2 = \dfrac{m(\omega^2 r\cos\alpha - g\sin\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}.$$

Обозначим длины нитей 1 и 2 l_1 и l_2 соответственно. Тогда $\sin\alpha = \frac{r}{l_1}$, $\cos\alpha = \frac{2a}{l_1}$, $\sin\beta = \frac{r}{l_2}$,

$\cos\beta = \frac{a}{l_2}$, $l_2 = \sqrt{l_1^2 - 3a^2}$.⇒

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(\omega^2 \cdot 2a - g\right)}{\left(g - \omega^2 a\right)} \cdot \frac{\sqrt{l_1^2 - 3a^2}}{l_1} \approx 1,44.$$

Ответ. 1,44 (1,4-1,5 – 1 балл, 1.3-1,6 –0,9 балла; 0,65-0,72; 1,1-1,9 – 0,5 балла)

6. *(11 баллов)* На гладкой горизонтальной поверхности находятся две тележки массами m_1 и m_2, соединенные невесомой пружиной, при этом тележка массой m_2 стоит вплотную к вертикальной стене. Тележку массой m_1, удерживают так, что пружина оказывается сжатой, величина деформации пружины равна x_0. Тележку m_1 отпускают без толчка. Определите отношение масс грузов m_1/m_2, если максимальная деформация пружины после того как обе тележки придут в движение, оказывается в два раза меньше, чем начальная деформация x_0. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

Решение. Найдем скорость тележки 1 v_1, в момент, когда пружина окажется недеформированной.

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{k x_0^2}{2}. \Rightarrow v_1 = x_0\sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

После этого обе тележки движутся по поверхности. Максимальная деформация пружины будет, когда скорости тележек равны и направлены в одну сторону. Обозначим скорость тележек в этот момент u, а деформацию пружины x_1. Тогда

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u, \\ \frac{k x_0^2}{2} = \frac{k x_1^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 - 1 = 3.$$

Ответ. 3 (0,33 – 0,5 балла)

7. *(15 баллов)* Мальчик бросает с поверхности земли камень с начальной скоростью v_0 = 14 м/с, направленной под углом α = 60° к горизонту. Затем по траектории камня мальчик запускает управляемый дрон, который движется с такой постоянной скоростью, что в верхней точке траектории его ускорение равно ускорению свободного падения. Какое ускорение имеет дрон в точке, находящейся на высоте h = 4,8 м, отсчитанной от уровня броска? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ дайте в м/с^2. Если ответ получается в виде бесконечной десятичной дроби, округлите его до сотых, если ответ – конечная десятичная дробь или целое число, приведите его без округления.

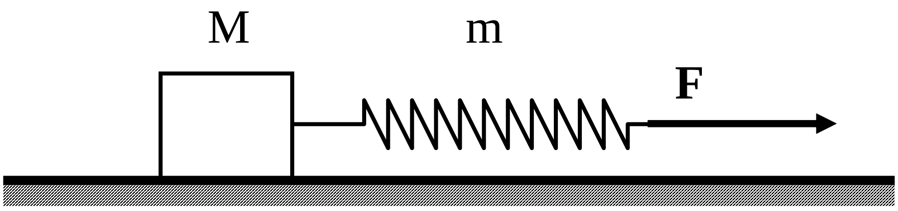
Решение. Сначала найдем радиус кривизны камня в верхней точке параболы. Ускорение в верней точке равно $a = g = \dfrac{(v_0 \cos\alpha)^2}{R_в}$. Тогда $R_в = \dfrac{(v_0 \cos\alpha)^2}{g}$. Так как ускорение дрона в верхней точке равно g, то $a = g = \dfrac{u^2}{R_в}$, тогда скорость дрона $u = v_0 \cos\alpha$.

Посчитаем теперь радиус кривизны параболы, по которой движется камень, в искомой точке. Для этого запишем выражение для нормального ускорения камня. $a_n = \dfrac{v^2}{R} = g\cos\varphi = g\dfrac{v_x}{v}$, где φ – угол, который образует вектор скорости камня $\vec{v}$ с горизонтальной осью x, $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ – скорость камня в искомой точке. $\Rightarrow$ $R = \dfrac{v^3}{gv_0}$. Тогда ускорение дрона равно

$$a = \frac{u^2}{R} = \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right)^3 g = 3{,}43 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. 3,43 (3,4-3,5 – 0,9 балла)

8. *(15 баллов)* На горизонтальной поверхности находится груз массой M= 3 кг, к которому прикреплена однородная пружина массой m = 2 кг, коэффициент жесткости которой k = 100 Н/м. К пружине приложена горизонтально направленная сила F = 10 Н (см. рисунок). Коэффициент трения между грузом и поверхностью μ = 0,1. Определите величину деформации пружины в процессе движения системы. В процессе движения пружина остается горизонтальной. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ дайте в сантиметрах (см), округлив его до десятых.



Решение. Ускорение системы $a = \dfrac{F - \mu Mg}{M + m}$. Разобьем пружину на большое количество N одинаковых маленьких кусочков (например, один кусочек пружины – один виток), жесткость каждого такого кусочка равна kN. Пронумеруем кусочки как i = 1, 2, …, N, начиная с конца пружины, к которому приложена сила F. Пусть T_i – сила упругости, действующая на i кусочков.

Тогда $F - T_i = \frac{mi}{N}a$. $\Rightarrow$ $T_i = F - \frac{ma}{N}i$. Растяжение пружины $x = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{T_i}{kN}$. $\Rightarrow$

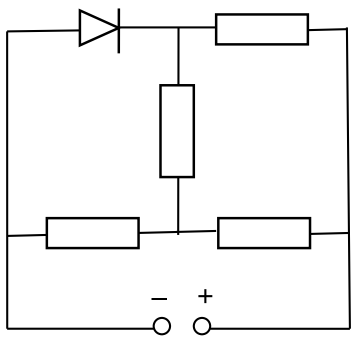
$$x = \sum_{i=1}^{N} \frac{F}{kN} - \sum_{i=1}^{N} \frac{ma}{kN^2} i.$$

Воспользуемся тем, что $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$, при $N \gg 1$. Тогда

$$x = \frac{F(2M+m) + \mu mMg}{2k(M+m)} = 8{,}6 \text{ см.}$$

Ответ. 8,6 (8,4-8,8 – 0,9 балла)

9. *(16 баллов)* Четыре одинаковых резистора и идеальный диод соединены в электрическую цепь и подключены к идеальному источнику тока напряжением U = 9 В, как показано на рисунке. Какое напряжение будет на диоде при таком включении его в электрическую цепь? Ответ дайте в вольтах (В), округлив его до десятых. Идеальный диод имеет нулевое сопротивление для тока, протекающего по нему в направлении «стрелки», и представляет собой бесконечное сопротивление, если ток по нему течет в противоположном направлении.



Решение. Ток через диод не течет. Эквивалентная схема изображена на рис.

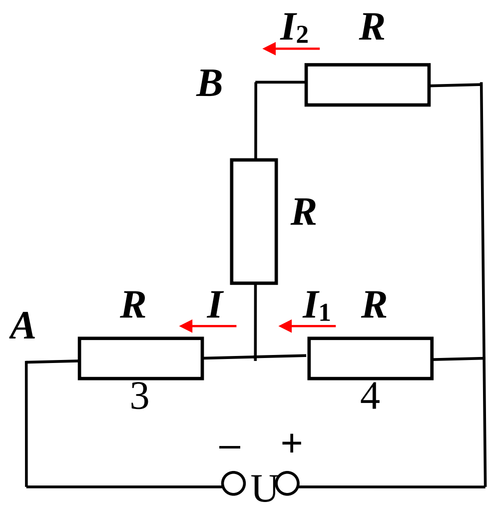
$$I_1R = I_2 \cdot 2R, \Rightarrow I_1 = 2I_2.$$

$$I = I_1 + I_2 = 3I_2.$$

$$IR + I_1R = U, \Rightarrow 3I_2R + 2I_2R = U, \Rightarrow I_2 = \frac{U}{5R}.$$

$$I_2R = U, \Rightarrow I_2 = \frac{U}{R}.$$

$$U_{AB} = I_2R + IR = \frac{U}{5} + \frac{3U}{5} = \frac{4U}{5} = 7{,}2 \text{ мА.}$$



Ответ. 7,2; –7,2(7,0-7,4, –7,4-–7,0 – 0,9 балла)