Решение варианта № 1

1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый автомобиль проехал половину пути, второй проехал $26\frac{1}{4}$ км, а когда второй проехал половину пути, первый проехал $31\frac{1}{5}$ км. Обогнав первый автомобиль, второй прибыл в пункт B, сразу повернул обратно и, проехав 2 км, встретился с первым автомобилем. Найдите расстояние между пунктами A и B. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. S – расстояние между пунктами A и B.

$$\frac{S-2-S/2}{S+2-26,25}=\frac{S-2-31,2}{S+2-S/2},\quad 5S^2-383S+5394=0,\quad \sqrt{D}=197,\quad S=58.$$

Ответ: 58.

2. Решите уравнение $\sqrt{8x+5}+2\{x\}=2x+2$. Здесь $\{x\}$ – дробная часть числа x, т.е. $\{x\}=x-[x]$. В ответ запишите сумму всех решений. (5 баллов)

Решение. Уравнение равносильно следующему $\sqrt{8x+5}-2[x]-2=0,\quad [x]=n\in\mathbb{N}$, $n\le x<n+1,\ 2n+2=\sqrt{8x+5},$ при $n\ge -1$ имеем $4n^2+8n-1=8x.$ Подставляем в двойное неравенство $8n\le 4n^2+8n-1<8n+8,\quad 1\le 4n^2<9,$ получаем $n=1$ и $n=-1.$ Следовательно, $x=-\dfrac{5}{8}$ и $x=\dfrac{11}{8}.$

Ответ: 0,75.

3. Найдите наибольшее целое число a, при котором выражение

$$a^2-15a-(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}x+2)(\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x+8)$$

меньше 35 при любом значении $x\in(-\pi/2\,;\,\pi/2)$. (6 баллов)

Решение. Сделаем замену $t=tgx.$ Выясним, для каких a неравенство $a^2-15a-(t-1)(t+2)(t+5)(t+8)<35$ выполняется при любом действительном t.

Имеем $(t-1)(t+8)(t+2)(t+5)>a^2-15a-35,\ (t^2+7t-8)(t^2+7t+10)>a^2-15a-35,$
$z=t^2+7t+1, (z-9)(z+9)>a^2-15a-35,\ z^2>a^2-15a+46,$
$0>a^2-15a+46,\ \sqrt{D}=\sqrt{41},\ \ (15-\sqrt{41})/2<a<(15-\sqrt{41})/2,\Rightarrow a=10.$

Ответ: 10.

4. Даны шесть носков, все разной окраски и легко растяжимы. Выворачивать их наизнанку нельзя. Сколькими способами можно надеть по 3 носка на каждую ногу, учитывая какой надевать раньше, какой позже? (12 баллов)

Решение. Имеется последовательность из 6 надеваний носков: $C_6^3 = 20$ способами выберем, какие надевания – на правую ногу. При каждом таком выборе можно выбрать 6!=720 способами, при каком надевании какой носок брать.

Ответ: 14400.

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 2t^2 - 9t - 1 = 0$. Найти $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{x\ y}{z}$. (12 баллов)

Решение. Приведем искомое выражение к общему знаменателю: $\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{xyz}$. Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т.к. P(-100) < 0, P(-1) > 0, P(0) < 0, P(100) > 0. По теореме Виета x+y+z=2, xy+xz+yz=-9, xyz=1.

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = (xy + xz + yz)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$$
$$= (xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z) = 81 - 2 * 1 * 2 = 77.$$

Ответ: 77.

6. На плоскости xOy прямые $y = 3x - 3$ и $x = -1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(1; 2)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? (12 баллов)

Решение.

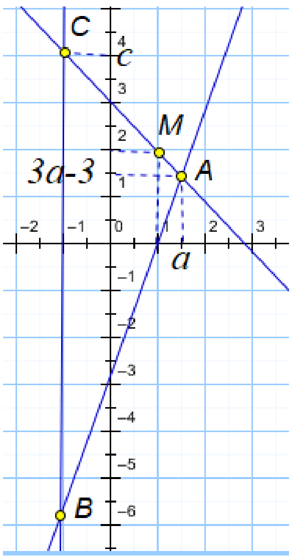
$$AC:\quad y = kx + d,\quad M \in AC \Rightarrow d = 2 - k$$

$$A(a; 3a-3) \in AC \Rightarrow 3a - 3 = ka + 2 - k \Rightarrow a = \frac{5-k}{3-k},$$

$$C(-1; c) \in AC \Rightarrow c = -2k + 2,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(c+6)\cdot(a+1) = \frac{2(k-4)^2}{3-k},$$

$$S' = \frac{2(k-4)(2-k)}{(3-k)^2} = 0,\ k_{\min} = 2,\quad a_{\min} = 3.$$



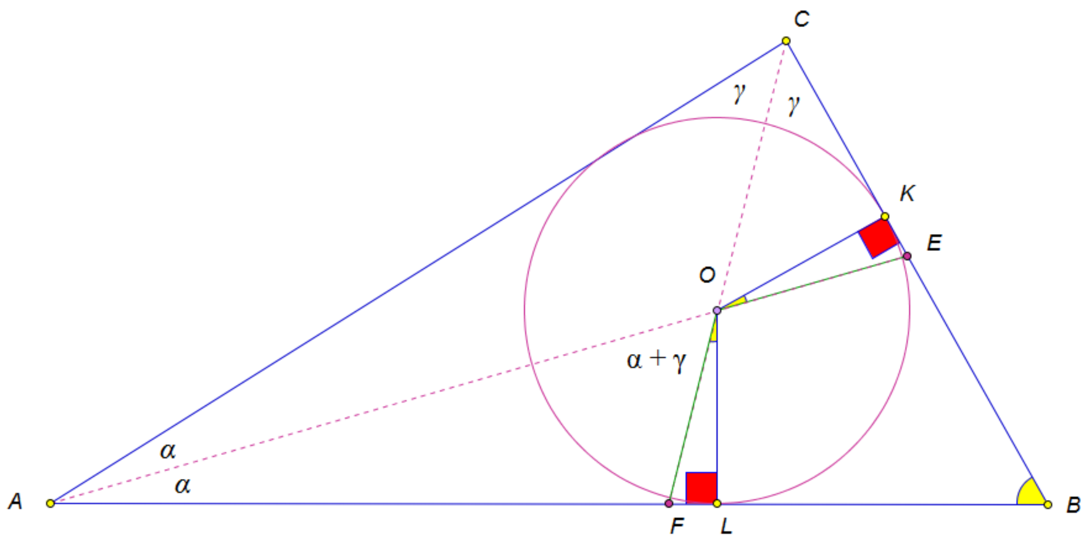
Ответ: 3.

7. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$ проведены биссектрисы AE и CF, которые пересекаются в точке O, причем $OE = OF$. Найдите квадрат медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B. (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив ∠A = 2α, ∠C = 2γ, вычислим величину углов ∠AOF = ∠COE. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, ∠AOF = ∠COE = α + γ.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом OL= OK (радиус вписанной окружности) и OF = OE (по условию). Отсюда следует, что ∠FOL = ∠KOE.



3. Заметим, что основание K высоты OK может оказаться как по одну, так и по другую сторону от точки E. Точно также, возможны два варианта расположения точки L по отношению к точке F. Всего получается четыре различных возможных случая. Вычислим и приравняем величины углов ∠FOL и ∠KOE для всех этих четырех случаев.

4. Из прямоугольного треугольника AOL имеем:
∠FOL = ∠AOL - ∠AOF = (π/2 – α) – (α + γ) = π/2 – 2α – γ, если L находится справа от F;
∠FOL = ∠AOF - ∠AOL = (α + γ) – (π/2 – α) = -π/2 + 2α + γ, если L находится слева F.
Аналогично, из прямоугольного треугольника KOE имеем:
∠KOE = ∠COE - ∠COK = (α + γ) – (π/2 – γ) = -π/2 + α + 2γ, если точка K находится выше точки E;
и ∠KOE = ∠COK - ∠COE = (π/2 – γ) – (α + γ) = π/2 – α – 2γ, если точка K находится ниже точки E.

5. Приравниваем величины углов ∠FOL и ∠KOE для этих четырех случаев:
 а) π/2 – 2α – γ = π/2 – α – 2γ ⇒ α = γ ⇒ ∠A = ∠C (равнобедренный треугольник);
 б) π/2 – 2α – γ = -π/2 + α + 2γ ⇒ α + γ = π/3 = 60° ⇒ ∠B = π – 2(α + γ) = π/3 = 60°;
 в) -π/2 + 2α + γ = -π/2 + α + 2γ ⇒ α = γ ⇒ ∠A = ∠C (равнобедренный треугольник);
 г) -π/2 + 2α + γ = π/2 – α – 2γ ⇒ α + γ = π/3 = 60° ⇒ ∠B = π – 2(α + γ) = π/3 = 60°;

6. Учитывая, что треугольник ABC по условию не является равнобедренным, получаем ∠B = 60°.

7. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = 13,\ AC = \sqrt{13}.$

8. $m_B^2 = \dfrac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AC^2) = 9{,}25.$

Ответ: 9,25.

8. Укажите наименьшее целое значение а, при котором существует единственное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4, \\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}. \end{cases}$$

(16 баллов)

Решение.

Решая систему методом подстановки, приходим к уравнению с ограничениями на неизвестную величину x .

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a-\sqrt{x}-1}=4 \\ y=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ne a-1 \\ \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}=4(a-\sqrt{x}-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ne a-1 \\ \sqrt{x}+5=4(a-\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \end{cases}$$

Для начала проверим, при каких значениях параметра возможен случай $\sqrt{x}=a-1$.

$$4(a-1)^2+(9-4a)(a-1)+(9-4a)=0 \Rightarrow 4(a-1)^2+9a-4a^2=0 \Rightarrow a=-4.$$

При этом значении параметра получим корень равный отрицательному числу, что невозможно.

Решаем квадратное уравнение $4x+(9-4a)\sqrt{x}+(9-4a)=0$.

$$D=(4a-9)(4a+7) \Rightarrow \sqrt{x}_{1,2}=\frac{4a-9\pm\sqrt{(4a-9)(4a+7)}}{8}.$$

Единственное неотрицательное решение будет при условиях

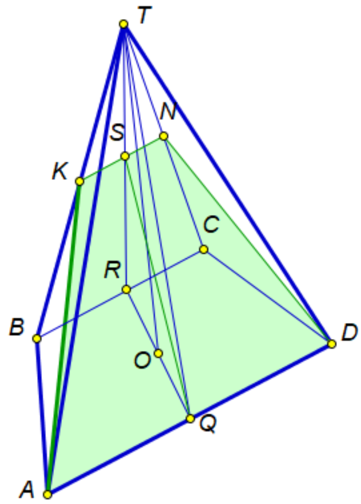
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (4a-9)(4a+7)=0 \\ \dfrac{4a-9}{8}\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\in(-\infty,-7/4)\cup(9/4,+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{9-4a}{4}<0 \\ \begin{cases} x_1x_2=\dfrac{9-4a}{4}=0 \\ x_1+x_2=\dfrac{4a-9}{4}<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=9/4 \\ a\in(9/4,+\infty) \end{array}\right.$$

выбирая наименьшее целое значение параметра, получим $a=3.$

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, средняя линия которой равна $5\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно 7 : 13. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды TAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, AD – большее основание трапеции ABCD. (16 баллов)

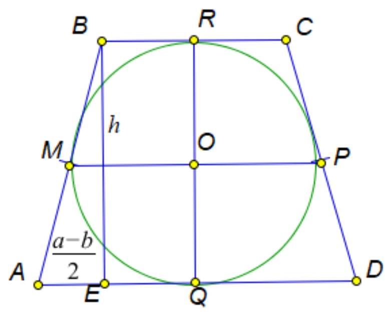
Решение.



Пусть TO – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O – центр окружности, вписанной в основание. Пусть MP –средняя линия трапеции, $AD = a,\ BC = b.$ По условию имеем

$S_{MBCP} = 7x,\ S_{AMPD} = 13x,\qquad \dfrac{7}{13} = \dfrac{b+5\sqrt{3}}{a+5\sqrt{3}},\ a+b = 10\sqrt{3},$

$a = 8\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}.$ Поскольку в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = a + b,\quad AB = CD = 5\sqrt{3}.$ Вычислим высоту трапеции $h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = 4\sqrt{3}.$ Через точку O проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках Q и R, $OR = h$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$,



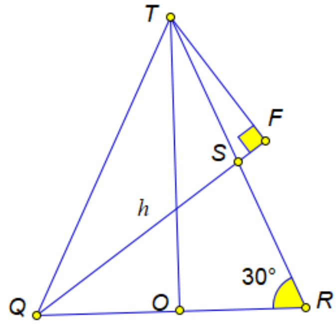
то высота пирамиды $TO = \dfrac{1}{2} QR \operatorname{tg} 30° = 2.$

Пусть TF – высота пирамиды $TAKND$, TF – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую QS, где S – середина KN. Вычислим объем пирамиды $TAKND$:

$V_{TAKND} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AD+KN}{2} \cdot QS \cdot TF.$ Площадь треугольника TQS можно вычислить двумя способами:

$S_{TQS} = \dfrac{QR \cdot TO}{4},\ S_{TQS} = \dfrac{QS \cdot TF}{2},\quad QS \cdot TF = \dfrac{QR \cdot TO}{2},$ и

$V_{TAKND} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{AD+KN}{2} \cdot QR \cdot TO.$ Отсюда получаем $V_{TAKND} = 18.$



Ответ: 18.

Решение варианта № 2

1. Группу школьников, направлявшихся в школьный лагерь, планировалось рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако, оказалось, что при этом не удалось посадить трех школьников. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все школьники сели поровну. Сколько школьников было в группе, если известно, что для перевозки школьников было выделено не более 18 автобусов, и в каждый автобус помещается не более 36 человек. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть n – количество автобусов, m – количество школьников в каждом автобусе, S – общее число школьников.

Имеем $S=22n+3,\quad S=(n-1)m,\ n\le 10,\ m\le 36,\quad 22n+3=(n-1)m,\quad n=1+\dfrac{25}{m-22}.$
Учитывая ограничения на n и m, получаем единственно возможный случай: $m=27,\quad n=6,\quad S=135.$

Ответ: 135.

2. Найдите все пары целых чисел (x,y), удовлетворяющих уравнению $x^2-xy-6y^2-11=0$. Для каждой найденной пары (x,y) вычислите произведение xy. В ответ запишите сумму этих произведений. (5 баллов)

Решение. $x^2-xy-6y^2-11=0,\ \ (x-3y)(x+2y)=11.$ Поскольку x и y целые, то имеем четыре случая:

1) $\begin{cases} x-3y=11, \\ x+2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y=-11, \\ x+2y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=1, \\ x+2y=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-3y=-1, \\ x+2y=-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ x=-7. \end{cases}$

Ответ: 8.

3. Пусть $g(x)=\dfrac{2}{x^2-8x+17}$. Найдите все возможные значения параметра a, при которых неравенство $a^2+6a+\dfrac{727}{145}\le g(g^4(x))\le 10a^2+29a+2$ выполняется при всех действительных x. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a. (6 баллов)

Решение. Функция $g(x)=\dfrac{2}{x^2-8x+17}=\dfrac{2}{(x-4)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;2]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=4$, $g_{\max}=g(4)=2$, на промежутке $(-\infty;4)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(4;+\infty)$ – убывает. Функция $g^4(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;16]$, поскольку

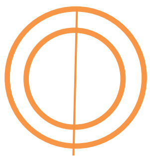
$t = g(x) \in (0; 2]$, а функция t^4 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x) = g(g^4(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0; 16]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(16); g(4)] = [2/145; 2]$.

Неравенство $a^2 + 6a + \dfrac{727}{145} \le g(g^4(x)) \le 10a^2 + 29a + 2$ выполняется при всех действительных x, если $(a+1)(a+5) \le 0, \quad 0 \le a(10a+29), a \in [-5; -2{,}9].$

Ответ: 2,1.

4. Сколькими способами можно начертить линию $x \sin\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$ без отрывов и повторов, т.е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии? (12 баллов)

Решение. Поскольку $\pi^2 < 16 < (2\pi)^2$, данная линия состоит из 2 окружностей радиусами 4 и $\sqrt{16 - \pi^2}$ и вертикального отрезка.



Эта линия уникурсальна, т.к. имеет лишь 2 нечетные точки A(0;4) и B(0;-4). Начать вычерчивать линию надо в одной из этих точек, закончить – в другой (2 варианта). Далее, 3! Способами можно выбрать, в каком порядке пройти левую дугу, правую дугу и диаметр. При прохождении диаметра так же 3! Способами выбираем, в какой последовательности проходить дуги и диаметр внутренней окружности. В итоге число способов 2*3!*3!=72.

Ответ: 72.

5. Для скольких двузначных натуральных чисел n верны ровно два из этих трех утверждений: (А) n нечетно; (Б) n не делится на 3; (В) n делится на 5? (12 баллов)

Решение. Можно рассмотреть первые 30 двузначных чисел (от 10 до 39), а потом результат умножить на 3, т.к. остатки при делении на 2, на 3 и на 5 не меняются при сдвиге на 30 или 60. Возможны три взаимоисключающих случая.

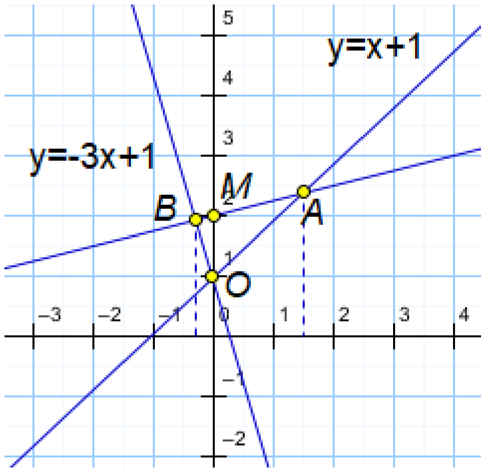
1) Выполнены (А) и (Б) и не выполнено (В). Из (А) и (Б) следует, что n делится на 6 с остатком 1 или 5, при этом n не должно делиться на 5. Таких чисел восемь: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.
2) Выполнено (А), не выполнено (Б) и выполнено (В). Тогда n делится на 6 с остатком 3, при этом n делится на 5. Такое число одно: 15.
3) Не выполнено (А), выполнены (Б) и (В). Тогда n делится на 6 с остатком 2 или 4, при этом n делится на 5. Таких чисел два: 10 и 20.

Итого: 3*(8+1+2)=33 числа.

Ответ: 33.

6. Какая наименьшая площадь может быть у треугольника OAB, если его стороны OA и OB лежат на графике функции $y = 2|x| - x + 1$, а прямая AB проходит через точку $M(0;2)$? (16 баллов)

Решение.



$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM}$, $A(a; a+1),\ B(b; -3b+1),$

$S_{AOM} = \dfrac{1}{2} OM \cdot a$, $S_{BOM} = \dfrac{1}{2} OM \cdot (-b)$, $OM = 1,$

$S_{AOB} = \dfrac{a-b}{2}$.

Прямая AB проходит через точку M, ее уравнение $y = kx + 2$. Выразим переменные a и b через параметр k, подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой AB: $a = ka + 1,\ a = \dfrac{1}{1-k},\ -3b = kb + 1,\ b = -\dfrac{1}{k+3}$. Выразим площадь треугольника

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+3}\right) = \frac{2}{3-2k-k^2} = \frac{2}{4-(k+1)^2}.$$

Поскольку $4-(k+1)^2 \le 4,$ то $S_{AOB} = \dfrac{2}{4-(k+1)^2} \ge \dfrac{1}{2}$. Наименьшее значение $\min S_{AOB} = \dfrac{1}{2}$ при $k = -1$.

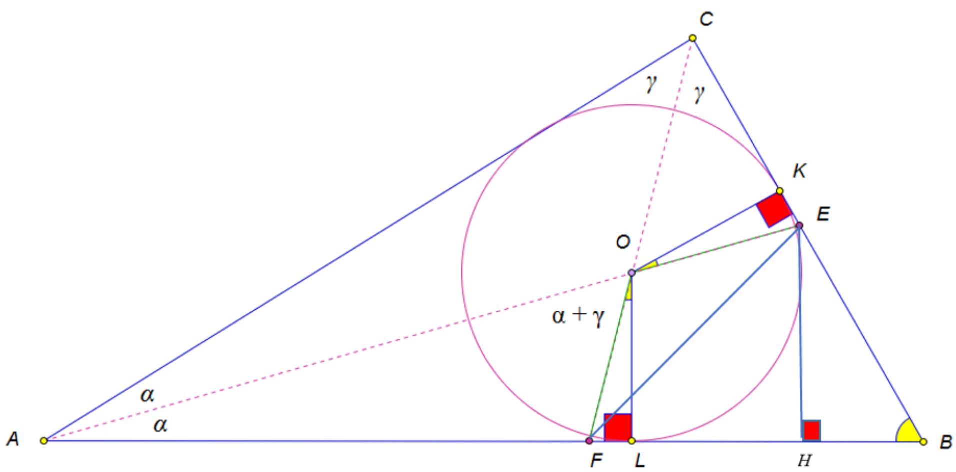
Ответ: 0,5.

7. В треугольнике ABC угол A равен 45°, угол B равен 60°, биссектрисы AE и CF пересекаются в точке O, причем $OE = \sqrt{3}/3$. Найдите площадь треугольника AEF. Результат округлите до десятых (все промежуточные вычисления проводить точно). (16 баллов)

Решение.

1. Обозначив ∠A = 2α, ∠C = 2γ, вычислим величину углов ∠AOF = ∠COE. Эти углы являются внешними для треугольника AOC. И значит, ∠AOF = ∠COE = α + γ = 60º.

2. Из точки O опустим высоты OL и OK на основания AB и BC, соответственно. При этом OL= OK (радиус вписанной окружности). Имеем ∠KOL=120º, ∠FOE=120º.



Отсюда следует, что ∠FOL = ∠KOE, треугольники FOL и KOE равны, и OE= OF.

3. Треугольник OEF равнобедренный, угол ∠FEO=30⁰, FE=1.

4. По теореме синусов для треугольника AEF имеем $\frac{EF}{\sin 45°/2}=\frac{AF}{\sin 30°}$,

$$AF=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

5. Пусть EH – высота треугольника AEF. Находим EH : ∠BFE=30⁰+45⁰/2,

$$EH = FE\sin(30° + 45°/2) = \sin 30°\cos 45°/2 + \cos 30°\sin 45°/2 =$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

6. $S_{AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot EH=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\approx 0,5.$

Ответ:0,5.

8. Найдите все целые значение параметра а, при которых система имеет хотя бы одно решение

$$\begin{cases} y-2=x(x+2), \\ x^2+a^2+2x=y(2a-y). \end{cases}$$

В ответе укажите сумму найденных значений параметра a . (16 баллов)

Решение. Преобразуем систему

$$\begin{cases} y-1=(x+1)^2, \\ (x+1)^2+(y-a)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-1=(x+1)^2, \\ y-2+(y-a)^2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы

$$y^2-y(2a-1)+a^2-2=0, \quad D=(2a-1)^2-4(a^2-2)=9-4a$$

Решение существует при $a\le 9/4$, $y=\frac{2a-1\pm\sqrt{9-4a}}{2}$, причем $y\ge 1.$

Для существования решения должны выполняться условия

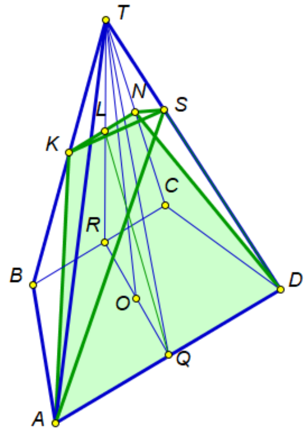
$$\begin{cases} D=9-4a\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(1)=a^2-2a>0 \\ \frac{2a-1}{2}>1 \end{cases} \\ f(1)=a^2-2a\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 9/4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(a-2)>0 \\ 2a-1>2 \end{cases} \\ a(a-2)\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow\ a\in[0,\ 9/4].$$

Суммируя целые значения параметра, получим 0+1+2=3.

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды TABCD является равнобедренная трапеция ABCD, длина большего основания AD которой равна $12\sqrt{3}$. Отношение площадей частей трапеции ABCD, на которые ее делит средняя линия, равно 5 : 7. Все боковые грани пирамиды TABCD наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды SAKND, где точки K и N – середины ребер TB и TC соответственно, точка S принадлежит ребру TD, причем TS : SD = 1 : 2. (16 баллов)

Решение.

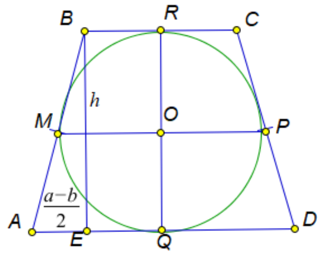


Пусть TO – высота пирамиды. Поскольку все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, то O – центр окружности, вписанной в основание. Пусть MP – средняя линия трапеции, $AD = a = 12\sqrt{3},\ BC = b.$

По условию имеем

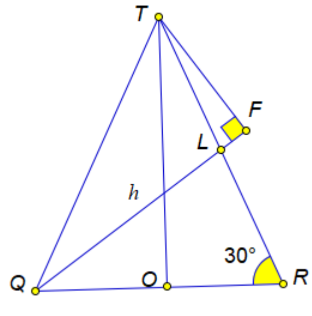
$S_{MBCP} = 5x,\ S_{AMPD} = 7x,$ $\quad \dfrac{5}{7} = \dfrac{b+(a+b)/2}{a+(a+b)/2} = \dfrac{3b+12\sqrt{3}}{b+36\sqrt{3}},$ $\quad b = 6\sqrt{3}.$

Поскольку в трапецию ABCD можно вписать окружность, то $AB + CD = a + b,\quad AB = CD = 19\sqrt{3}.$ Вычислим высоту трапеции $h = \sqrt{AB^2 - (a-b)^2/4} = 6\sqrt{6}.$ Через точку O проведем прямую, перпендикулярную основаниям трапеции и пересекающую эти основания в точках Q и R, OR = h. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$, то высота пирамиды $TO = \dfrac{1}{2} QR\,\mathrm{tg}\,30° = 3\sqrt{2}.$



Пусть TF – высота пирамиды TAKND, TF – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую QL, где L – середина KN. Вычислим объем пирамиды SAKND: $V_{SAKND} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AD+KN}{2} \cdot QS \cdot \dfrac{2}{3} TF.$ Площадь треугольника TQS можно вычислить двумя способами:

$$S_{TQS} = \frac{QR \cdot TO}{4},\ S_{TQS} = \frac{QS \cdot TF}{2},\quad QS \cdot TF = \frac{QR \cdot TO}{2},$$



и $V_{SAKND} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{AD+KN}{2} \cdot \dfrac{2}{3} QR \cdot TO.$

Отсюда получаем $V_{SAKND} = 90.$

Ответ: 90.