Решение задач заочного тура, 10 класс.

1. При испытании гоночный автомобиль разгоняется с постоянным ускорением на прямолинейном треке. В определенных точках трека стоят устройства, фиксирующие текущую координату *x* и скорость автомобиля *v*. В результате компьютерного сбоя большая часть данных с этих устройств была безвозвратно потеряна, а те данные, которые удалось восстановить, приведены в таблице.

x, м	?	35	45	65
v, км/ч	33,0	80,8	?	132

Расстояние между соседними фиксирующими устройствами 5 м, относительная погрешность определения скорости 1%.

1) Определите с максимально возможной точностью ускорение автомобиля.

2) Попробуйте восстановить данные в ячейках, в которых стоит знак вопроса.

3)Определите координаты фиксирующих устройств, мимо которых автомобиль пройдет спустя 1 секунду и спустя 2 секунды после начала разгона.

Решение: Переведем значения скоростей v_i в таблице в СИ (м/с) и добавим строку v_i^2, i = 1, 2, 3, 4.

x_i, м	x_1 = ?	x_2 = 35	x_3 = 45	x_4 = 65
v_i, км/ч	v_1 = 33,0	v_2 = 80,8	v_3 =?	v_4 = 132
v_i, м/с	v_1 = 9,17	v_2 = 22,44	v_3 =?	v_4 = 36,67
v_i^2, м/с	v_1^2 = 84	v_2^2 = 503,75	v_3 =?	v_4^2 = 1344,44

Пусть начальная координата автомобиля $x(0) = x_0$, начальная скорость, по условию, $v(0) = v_0 = 0$, ускорение автомобиля *a*. Тогда $v_i^2 = 2a(x_i - x_0)$. (1)

Возможные способы дальнейшего решения задачи.

1 способ (графический). Пользуясь приведенной выше таблицей, можно построить график $v^2(x)$ или $x(v^2)$ – прямую. Затем из графика извлечь угловой коэффициент этой прямой, который связан с ускорением *a*, а также найти x_0, и неизвестные значения x_1 и v_3.

2 способ (аналитический). Пользуясь уравнением (1) и используя известные значения скорости и координаты, получим систему:

$$\begin{cases} v_2^2 = 2a(x_2 - x_0), \\ v_4^2 = 2a(x_4 - x_0). \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_4^2 - v_2^2}{2(x_4 - x_2)}, \; x_0 = x_2 - \frac{v_2^2}{2a}.$$

Используя (1) и значения a и x_0, полученные из решения приведенной выше системы, можно найти неизвестные значения x_1 и v_3 по формулам

$$x_1 = x_0 + \frac{v_1^2}{2a}, \; v_3 = \sqrt{2a(x_3 - x_0)}.$$

Оба способа дают следующие численные значения величин

1) a = 14 м/с2, x0 = 17 м.

2) x1 = 20 м, v3 = 28 м/с = 100,8 км/ч.

3) Для ответа на третий вопрос, воспользуемся формулой $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$.

При t = 1 с, получим $x = 17 + \frac{14 \cdot 1^2}{2} = 24$ м. Т.к. фиксирующие устройства расположены через пять метров, т.е. координаты фиксирующих устройств – целые и кратны 5, то спустя 1 с после начала движения автомобиль пройдет мимо устройства с координатой x = 25 м.

При t = 2 с, $x = 17 + \frac{14 \cdot 2^2}{2} = 45$ м. Т.е. спустя 2 с автомобиль пройдет мимо фиксирующего устройства с координатой x = 45 м.

Ответ: 1) a = 14 м/с^2.

2) x1 = 20 м, v3 = 28 м/с = 100,8 км/ч.

3) спустя 1 с после начала движения автомобиль пройдет мимо устройства с координатой x = 25 м, а спустя 2 с – мимо фиксирующего устройства с координатой x = 45м.

Критерии оценивания задачи 1.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. **Баллы за каждый верный элемент решения суммируются**	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
1	Для решения используется формула (1)	от 1 до 2 баллов
2	Получено значение ускорения	от 1 до 3 баллов

3	Получено значение начальной координаты	от 1 до 3 баллов
4	Получено значение ячейки x_1	от 1 до 3 баллов
5	Получено значение ячейки v_3	от 1 до 3 баллов
6	Получено значение координаты фиксирующего устройства спустя 1 секунду	от 1 до 3 баллов
5	Получено значение координаты фиксирующего устройства спустя 2 секунды	от 1 до 3 баллов

2. Два орудия установлены на плоском горизонтальном участке лунной поверхности. Ствол одного орудия наклонен под углом α = 15°, а другого – под углом β = 75° к поверхности. Снаряды вылетели из жерл орудий одновременно с одинаковыми начальными скоростями, траектории движения снарядов лежат в одной плоскости. Чему равно минимальное расстояние между снарядами в процессе полета, если расстояние между орудиями L = 1000 м?

Решение: Из различных вариантов расположения орудий, только в двух случаях, изображенных на рисунках а и б, расстояние между снарядами в процессе движения имеет минимальное значение; во всех остальных случаях расстояние между снарядами в процессе движения увеличивается, т.е. минимальное значение этого расстояния равно L.

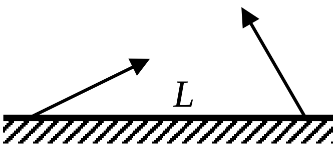


Рис. а

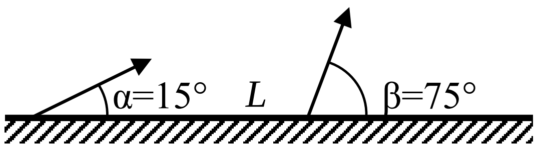


Рис. б

Докажем это утверждение. Рассмотрим общий случай (рис. в).

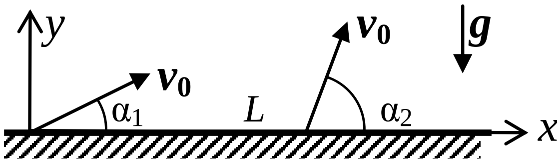


Рис. в

В отсутствие атмосферы, ускорение снарядов равно ускорению свободного падения на Луне g. Обозначим начальные скорости снарядов v_0, углы, которые орудия образуют с поверхностью Луны α_1 и α_2,

Уравнения движения снарядов

$$x_1 = v_0 \cos\alpha_1 \cdot t, \qquad y_1 = v_0 \sin\alpha_1 \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = v_0 \cos\alpha_2 \cdot t + L, \; y_2 = v_0 \sin\alpha_2 \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Квадрат расстояния между снарядами в процессе движения равен

$$s^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2.$$

Подставим в это выражение координаты снарядов, и после необходимых алгебраических преобразований получим

$$s^2 = 2v_0^2\left[1-\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]t^2 + 2Lv_0\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)t + L^2.$$

Относительно *t* полученное выражение – квадратичная функция. Ее минимальное значение можно найти различными способами, например, с помощью производной, или путем нахождения вершины параболы. Проводя подобный анализ функции $s^2(t)$, получим, что минимум этой функции достигается при

$$t = \frac{L}{2v_0}\cdot\frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{1-\cos(\alpha_2-\alpha_1)} = \frac{L}{2v_0}\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)}.$$

Чтобы минимальное значение расстояния достигалось в процессе движения снарядов, должно быть $t > 0$, т.е. при $\alpha_2 > \alpha_1$. При этом $s_{\min} = L\cos\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$.

Проведем расчет минимального расстояния.

Для рис. а. $\alpha_1 = \alpha = 15^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ - \beta = 105^\circ$ или $\alpha_1 = \beta = 75^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha = 165^\circ$

$\Rightarrow s_{\min} = L\cos 60^\circ = \dfrac{L}{2} = 500$ м.

Для рис. б. $\alpha_1 = \alpha = 15^\circ$, $\alpha_2 = \beta = 75^\circ \Rightarrow s_{\min} = L\cos 45^\circ = \dfrac{L\sqrt{2}}{2} = 707$ м.

II способ (графический). Векторы скоростей снарядов $\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t$. Относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} = \overrightarrow{const}$. В системе отсчета, связанной с первым снарядом, второй снаряд движется с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{отн.}}$. Построим этот вектор. Т.к. первый снаряд при этом неподвижен, то минимальное расстояние между ними – это длина перпендикуляра, опущенного из точки, где находится первое орудие на направление вектора $\vec{v}_{\text{отн.}}$.

В случае расположения пушек, как на рис. а, угол между векторами начальных скоростей $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ равен 90°, поэтому треугольник, образованный векторами скоростей $\vec{v}_{02}, -\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{\text{отн.}}$ – прямоугольный, а т.к. $|\vec{v}_{01}| = |\vec{v}_{02}| = v_0$, то этот треугольник еще и равнобедренный, поэтому угол $\theta = 45^\circ$.

Тогда $\varphi = \beta - \theta = 30^\circ$. $s_{\min} = L\sin\varphi = \frac{L}{2} = 500$ м.

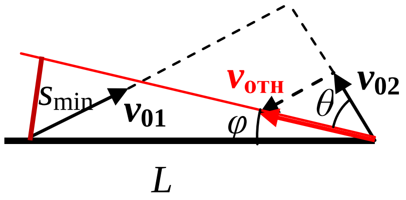


Рис. а

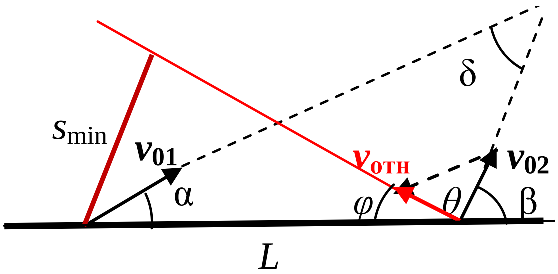


Рис. б.

В случае расположения пушек, как на рис. б ($\alpha = 15^\circ, \beta = 75^\circ$), угол между векторами начальных скоростей $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ равен $\delta = 60^\circ$, поэтому треугольник, образованный векторами скоростей $\vec{v}_{02}, -\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{отн.}$ – равносторонний, в нем угол $\theta = 60^\circ$. Соответственно угол $\varphi = 180^\circ - \beta - \theta = 45^\circ$.

Тогда $s_{\min} = L\sin\varphi = \frac{L\sqrt{2}}{2} = 707$ м.

Ответ. В случае расположения пушек как на рис. а $s_{\min} = \frac{L}{2} = 500$ м.

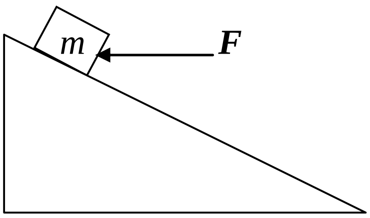
В случае расположения пушек как на рис. б $s_{\min} = \frac{L\sqrt{2}}{2} = 707$ м.

Во всех остальных случаях $s_{\min} = L = 1000$ м.

Критерии оценивания задачи 2.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
1	Сделан рисунок, указаны различные варианты расположения орудий.	от 1 до 2 баллов
2	Записаны формулы для координат или скоростей снарядов (при решении вторым способом)	от 1 до 3 баллов
3	Проведен расчет минимального расстояния в одном из двух случаев а или б	от 1 до 10 баллов **Если правильно рассмотрен только лишь один случай, полная сумма баллов не более 15**
4	Проведен расчет минимального расстояния в другом из двух случаев а или б	от 1 до 4 баллов
5	Указано, что во всех остальных случаях $s_{\min} = L = 1000$ м.	1 балл

3. Чтобы удержать на наклонной плоскости небольшое тело массой m, к нему прикладывают горизонтальную силу F, как показано на рисунке. Величина силы F может меняться. Тело остается неподвижным на наклонной плоскости, пока $\frac{1}{3}mg \le F \le 3mg$, где g – ускорение свободного падения. С каким ускорением будет двигаться тело по этой наклонной плоскости, если сила F перестанет на него действовать?



Решение:

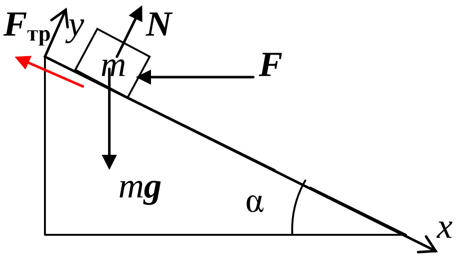


Рис. а

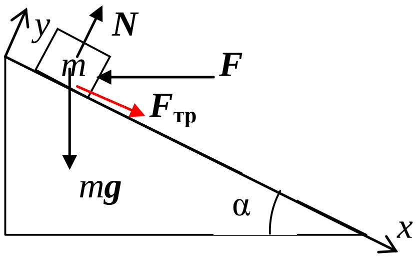


Рис. б.

1. Тело не скатывается вниз (рис. а).

$$\begin{cases} x: mg\sin\alpha - F\cos\alpha - F_{тр} = 0, \\ y: N - F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} \le \mu N. \end{cases} \Rightarrow \quad F \ge \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}$$

2. Тело не движется вверх (рис. б).

$$\begin{cases} x: mg\sin\alpha - F\cos\alpha + F_{тр} = 0, \\ y: N - F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{тр} \le \mu N. \end{cases} \Rightarrow \quad F \le \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

3. По условию тело покоится пока $\frac{1}{3}mg \le F \le 3mg$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{3}mg, \\ \dfrac{mg(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = 3mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha - \mu = \dfrac{1}{3}(1 + \mu\operatorname{tg}\alpha), \\ \operatorname{tg}\alpha + \mu = 3(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 + 3\mu}{3 - \mu}, \\ 2\mu^2 + 3\mu - 2 = 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $\mu = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$.

Т.к. $\mu > 0$, то $\mu = 0{,}5$, $\mathrm{tg}\alpha = 1, \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

4. Если сила F перестанет действовать на тело, то его ускорение равно $a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}g = 3{,}5$ м/с^2.

Ответ: $a = \frac{\sqrt{2}}{4}g = 3{,}5$ м/с^2.

Критерии оценивания задачи 3.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. **Баллы за каждый верный элемент решения суммируются**	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
1	Сделан рисунок, на котором указаны все силы, действующие на тело	от 1 до 2 баллов
2	Записаны уравнения динамики в случае 1 и получена формула для минимальной силы F, при которой тело не скатывается вниз	от 1 до 3 баллов
3	Записаны уравнения динамики в случае 2 и получена формула для максимальной силы F, при которой тело не движется вверх	от 1 до 3 баллов
4	Записана система (п.3) и получены значения μ и α.	от 1 до 7 баллов
5	Получена формула для ускорения тела a в отсутствие силы F.	от 1 до 3 баллов
6	Сделан численный расчет ускорения a.	от 1 до 2 баллов

4. В результате радиоактивного распада неподвижный атом разделился на две части. Определите отношение масс этих частей, если кинетическая энергия одной из частей распавшегося атома составляет 20% полной кинетической энергии продуктов распада.

Решение: Пусть m_1, m_2 – массы, v_1, v_2 – скорости распавшихся частей атома. Запишем закон сохранения импульса для распада атома: $0 = m_1v_1 - m_2v_2$. (1)

Обозначим полную кинетическую энергию продуктов распада E. Тогда кинетическая энергия распавшейся части массой m_1 равна $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 0,2E$, а другой части массой m_2 – $E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = 0,8E$. Тогда $\frac{E_2}{E_1} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{0,8}{0,2} = 4$. (2)

Составим систему

$$\begin{cases} \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = 4, \\ m_1 v_1 = m_2 v_2. \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4.$$

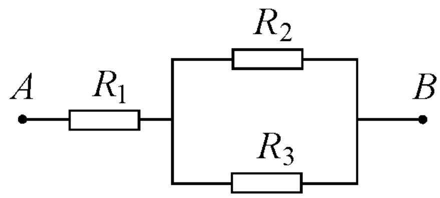
Ответ. $\frac{m_1}{m_2} = 4$ или $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$.

Критерии оценивания задачи 4.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. Баллы за каждый верный элемент решения суммируются	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
1	**Записано** уравнение закона сохранения импульса (1)	от 1 до 5 баллов
2	Получено отношение кинетических энергий распавшихся частей (2)	от 1 до 5 баллов
3	Записана и решена система и получен правильный ответ	от 1 до 10 баллов

5. При выполнении лабораторной работы по физике ученик Знайкин Иван получил от учителя три резистора с неизвестными сопротивлениями. Учитель сообщил, что, сопротивления двух резисторов из трех одинаковы, а также, что сопротивления всех трех резисторов в омах имеют целочисленные значения. По указанию учителя Иван собрал цепь, схема которой изображена на рисунке, и подключил к точкам A и B источник постоянного тока напряжением U_0 = 5 В, внутреннее сопротивление которого равно нулю. Затем он измерил силу тока I_1, протекающего по резистору R_1, и напряжение U_2 на резисторе R_2 и получил следующие результаты: I_1 = 1,5 А, U_2 = 2 В. После этого Знайкин заявил, что он сможет посчитать сопротивления резисторов. Какие значения он получил?

Можно ли на самом деле найти значения сопротивлений каждого резистора в данных условиях?



Решение:

1. Напряжение на резисторе R_1 равно $U_1 = U_0 - U_2 = 3$В. Тогда сопротивление резистора R_1 равно $R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{3}{1{,}5} = 2$ Ом.

2. По условию, сопротивления двух резисторов одинаковы. Пусть $R_2 = R_3$. Тогда токи через эти резисторы равны $I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = 0{,}75$ А. А сопротивления $R_2 = R_3 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{2}{0{,}75} \approx 2{,}67$ Ом. Но, по условию, все сопротивления имеют целочисленные значения. Значит $R_2 \neq R_3$. Т.е. только одно из значений сопротивлений R_2 или R_3 равно R_1.

3. Пусть $R_2 = R_1 = 2$ Ом. Тогда $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{2}{2} = 1$ А,

$I_3 = I_1 - I_2 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ А. Значит $R_3 = \frac{U_2}{I_3} = \frac{2}{0{,}5} = 4$ Ом. Т.о. ученик получил значения сопротивлений резисторов 2 Ом, 2 Ом, 4 Ом. Но какой из резисторов R_2 или R_3 имеет сопротивление 2 Ом, а какой 4 Ом, определить нельзя.

Ответ. Значения сопротивлений резисторов 2 Ом, 2 Ом, 4 Ом. Нельзя в данных условиях определить, какие значения имеют сопротивления R_2 и R_3.

Критерии оценивания задачи 5.

	Решение содержит следующие верные элементы решения. **Баллы за каждый верный элемент решения суммируются**	**Max. балл ставится, когда данный элемент решения сделан верно и полно.**
1	Посчитано сопротивление резистора R1	от 1 до 5 баллов
2	Установлено, что сопротивления R_2 и R_3 имеют различные значения.	от 1 до 5 баллов
3	Посчитаны значения сопротивлений R_2 и R_3	от 1 до 5 баллов
4	Есть объяснение, почему нельзя найти значения сопротивлений каждого резистора в данных условиях	от 1 до 5 баллов