

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 1

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

Задача 2 (16 баллов). В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

Задача 3 (16 баллов). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC , $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB , если K – точка пересечения диагоналей AC и BD , $BK:KD = 1:3$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ \sqrt{x^2 y^2} = 4a \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

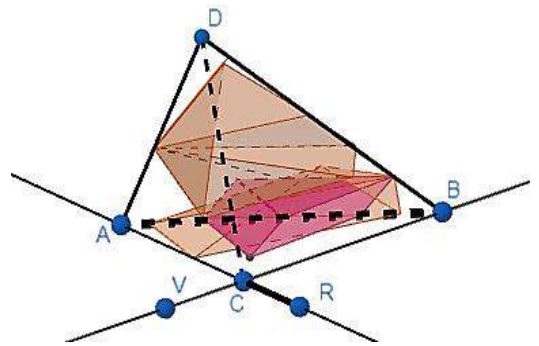
Задача 5 (20 баллов). В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180° . Найдите объём тетраэдра, если $BC = 4$, $\cos \angle BAC = 3/4$, $\sin \angle CBD = 5\sqrt{7}/16$.

Задача 6 (20 баллов). По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы.

1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки C до точки A и от точки C до точки B (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2,5$ м для точек R и V , расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты A, C и C, B соответственно.

Определите расстояние между точками A и B (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки $CADB$ при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB .

2) Из земли торчал негнувшийся кусок арматуры - штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился.



Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$. (12 баллов)

Решение. Согласно теореме Виета, $u + v + w = 0, uv + vw + wv = -3, uvw = 1$. Рассмотрим последовательность $S_n = u^n + v^n + w^n$. Имеем $S_0 = 3, S_1 = 0$. Найдем S_2 :
 $S_2 = u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + wv) = 6$. Поскольку $u^3 = 3u + 1, v^3 = 3v + 1, w^3 = 3w + 1$, то $S_3 = u^3 + v^3 + w^3 = 3S_1 + S_0$. Далее $u^n = 3u^{n-2} + u^{n-3}, v^n = 3v^{n-2} + v^{n-3}, w^n = 3w^{n-2} + w^{n-3}$, то $S_n = 3S_{n-2} + S_{n-3}$. Находим $S_3 = 3, S_4 = 18, S_5 = 15, S_6 = 57, S_7 = 63, S_9 = 246$.

Ответ: 246

2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать. (16 баллов)

Решение. Пусть N — имеющееся количество больших колб в лаборатории, $N = 2, 3, \dots, 98$, $n = 100 - N$ — имеющееся количество малых колб в лаборатории, $n = 2, 3, \dots, 98$, и $P(A)$ — вероятность события $A = \{\text{содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно}\}$. Необходимо найти такое наименьшее N , чтобы было $P(A) < 1/2$.

Мысленно перенумеруем все имеющиеся в лаборатории колбы — присвоим им личные номера от 1 до 100. И тогда равновероятными исходами этого эксперимента будут упорядоченные пары различных личных номеров последовательно выбираемых лаборантом колб: $\omega = (i_1, i_2), i_j \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}, i_j \neq i_k, j, k = 1, 2$. Общее количество таких исходов равно $100 \cdot 99 = 9900$.

Вычислим теперь количество благоприятных исходов для появления события A . Рассмотрим следующие случаи, определяемые размерными типами выбранных колб.

- 1) Лаборант выбирает две большие колбы - тип [Б, Б]. Тогда процентное содержание соли в чаше в результате описанных манипуляций лаборанта окажется равным величине: $\frac{(0,7V+0,4V)100}{2V} = 55\% \in [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб **благоприятствует** появлению события A . Количество элементарных исходов данного типа, очевидно, равно $N \cdot (N - 1)$.
- 2) Лаборант выбирает две маленькие колбы - тип [м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V/3+0,4V/3)100}{2V/3} = 55\% \in [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб **благоприятствует** появлению события A . Количество исходов в этом случае равно $n \cdot (n - 1)$.
- 3) Лаборант выбирает сначала большую колбу, затем маленькую - тип [Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V+0,4V/3)100}{4V/3} = 62,5\% \notin [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб не благоприятствует появлению события A .
- 4) Лаборант выбирает сначала малую колбу, затем большую колбу - тип [м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0,7V/3+0,4V)100}{4V/3} = 47,5\% \notin [50\%; 60\%]$. Такой выбор колб также не благоприятствует появлению события A .

Вычисляем вероятность события A (по формуле классической вероятности):

$$P(A) = \frac{N \cdot (N-1) + n \cdot (n-1)}{100 \cdot 99} = \frac{N^2 - N + n^2 - n}{100 \cdot 99} = \frac{N^2 - N + (100 - N)^2 - (100 - N)}{100 \cdot 99} = \frac{2N^2 - 200N + 100^2 - 100}{100 \cdot 99} = \frac{2N^2 - 200N + 9900}{9900} = \frac{N^2 - 100N + 4950}{4950} = \frac{(N-50)^2 + 2450}{4950}.$$

Отсюда имеем $P(A) = \frac{(N-50)^2 + 2450}{4950} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 45 < N < 55$. И значит, $N_{\min} = 46$.

Ответ: при $N = 46$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC , $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB , если K – точка пересечения диагоналей AC и BD , и $BK:KD = 1:3$. (16 баллов)

Решение.

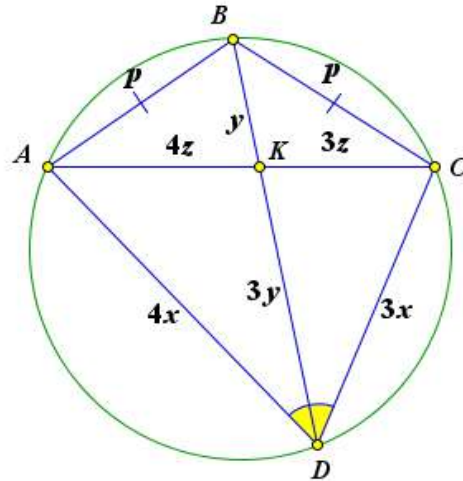
1) $AD:DC = 4:3$, пусть $AD = 4x, DC = 3x$,

$BK:KD = 1:3$, пусть $BK = y, KD = 3y$.

2) DK – биссектриса треугольника ADC ,

$AK:KC = AD:DC = 4:3, AK = 4z, KC = 3z$.

3) Точка B является точкой пересечения серединного перпендикуляра к диагонали AC и биссектрисы угла D в выпуклом четырехугольнике $ABCD$. Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность. Действительно, опишем окружность около треугольника ACD ,



обозначим точку пересечения биссектрисы угла D с окружностью через B_1 . Тогда по свойству вписанных углов дуги AB_1 и B_1C будут равны, хорды AB_1 и B_1C тоже будут равны, треугольник AB_1C будет равнобедренным, и серединный перпендикуляр к диагонали AC и биссектриса угла D будут пересекаться в точке B_1 . Следовательно, $B_1 = B$.

4) Поскольку около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то для его диагоналей верно равенство $AK \cdot KC = BK \cdot KD, 4z^2 = y^2, y = 2z$.

5) Треугольник ABK подобен DCK , и $\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC}$, пусть $AB = p, \frac{p}{3x} = \frac{y}{3z} = \frac{2}{3}, p = 2x, x = \frac{p}{2}$.

6) $AD = 2p, DC = \frac{3p}{2}$.

7) По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC с учетом $\angle B + \angle D = 180^\circ$ имеем

$$49z^2 = 2p^2 - 2p^2 \cos \angle B, 49z^2 = 4p^2 + \frac{9p^2}{4} + 6p^2 \cos \angle B. \text{ Отсюда } z = \frac{p}{4}, y = \frac{p}{2}, AK = p, BK = \frac{p}{2}.$$

8) Для равнобедренного треугольника ABK имеем $\cos \angle AKB = \frac{BK}{2AK} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $1/4$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ \sqrt{x^2 y^2} = 4a \end{cases}$$

имеет шесть различных решений. (16 баллов)

Решение. Имеем

$$\begin{cases} ay - ax + 2 = 0, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0, \\ 4y - 3|x - a| - x + 5a = 0, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2/a, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0, \\ y = 3|x - a|/4 + x/4 - 5a/4, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0. \end{cases}$$

I. $\begin{cases} y = x - 2/a, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0. \end{cases}$

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$\frac{2}{a} < 4\sqrt{a}, \quad a > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, \quad x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0,$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}, \quad y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}.$$

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$\frac{2}{a} = 4\sqrt{a}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}, \quad y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a},$$

$$x_3 = 2\sqrt{a}, \quad y_3 = -2\sqrt{a}.$$

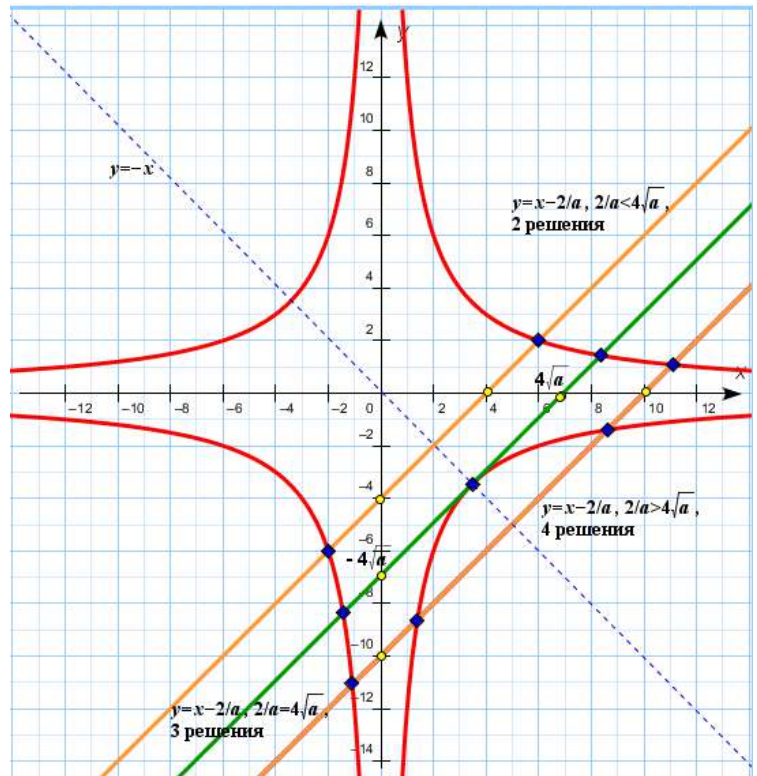
3) Система имеет 4 различных решения, если

$$\frac{2}{a} > 4\sqrt{a}, \quad 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, \quad x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0, \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}, \quad y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}.$$

$$x - \frac{2}{a} = -\frac{4a}{x}, \quad x^2 - \frac{2}{a}x + 4a = 0, \quad x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^3}}{a}, \quad y_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a^3}}{a}.$$



$$\text{II. } \begin{cases} y = 3|x - a|/4 + x/4 - 5a/4, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0. \end{cases}$$

$$y = 3|x - a|/4 + x/4 - 5a/4,$$

при $x \geq a$ имеем $y = x - 2a$, при $x \leq a$ имеем $y = -\frac{x+a}{2}$.

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$2a < 4\sqrt{a}, \quad a < 4.$$

Найдем эти решения:

$$x - 2a = \frac{4a}{x}, \quad x^2 - 2ax - 4a = 0,$$

правый корень $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};$$

$$-\frac{x+a}{2} = -\frac{4a}{x}, \quad x^2 + ax - 8a = 0, \text{ левый}$$

корень $x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 32a}}{2}, \quad y_2 =$

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 32a}}{4}.$$

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$2a = 4\sqrt{a}, \quad a = 4.$$

Найдем эти решения:

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a},$$

$$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 32a}}{2}, \quad y_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 32a}}{4}.$$

$$x_3 = 2\sqrt{a}, \quad y_3 = -2\sqrt{a}.$$

3) Найдем значение параметра $a > 0$, при котором прямая $y = -\frac{x+a}{2}$ будет

иметь с гиперболой $y = \frac{4a}{x}$ единственную общую точку.

$$-\frac{x+a}{2} = \frac{4a}{x}, \quad x^2 + ax + 8a = 0,$$

$D = a(a - 32) = 0, \quad a = 32$. Тогда при

$4 < a < 32$ система будет иметь 4 решения: $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};$$

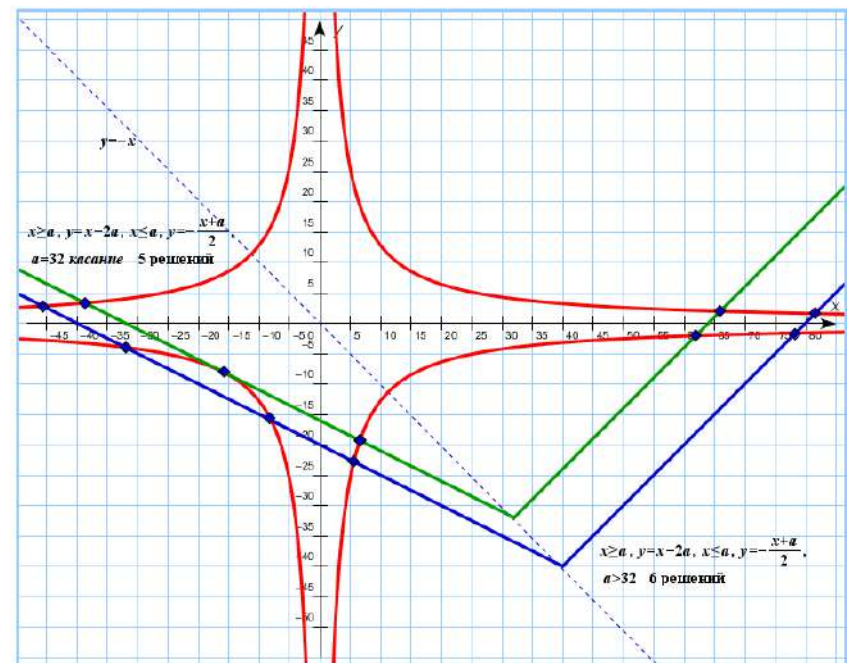
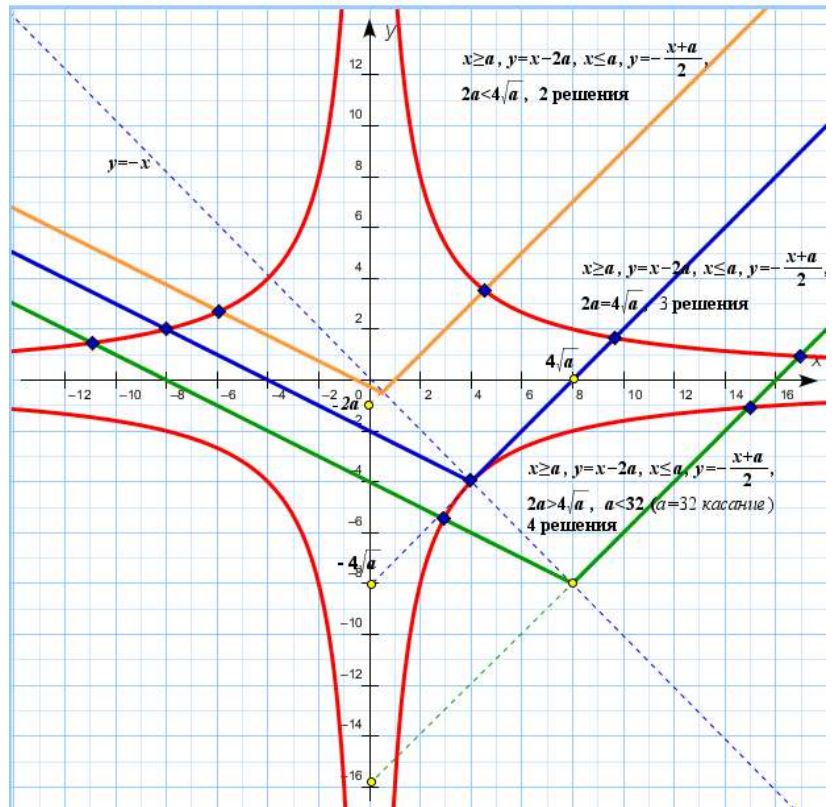
$$x_{2/3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 32a}}{2}, \quad y_{2/3} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 32a}}{4}. \text{ Найдем четвертое решение:}$$

$$x - 2a = -\frac{4a}{x}, \quad x^2 - 2ax + 4a = 0, \text{ правый корень } x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, \quad y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}.$$

4) При $a = 32$ система будет иметь 5 различных решений:

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}, \quad y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}; \quad x_{2/3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 32a}}{2}, \quad y_{2/3} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 32a}}{4},$$

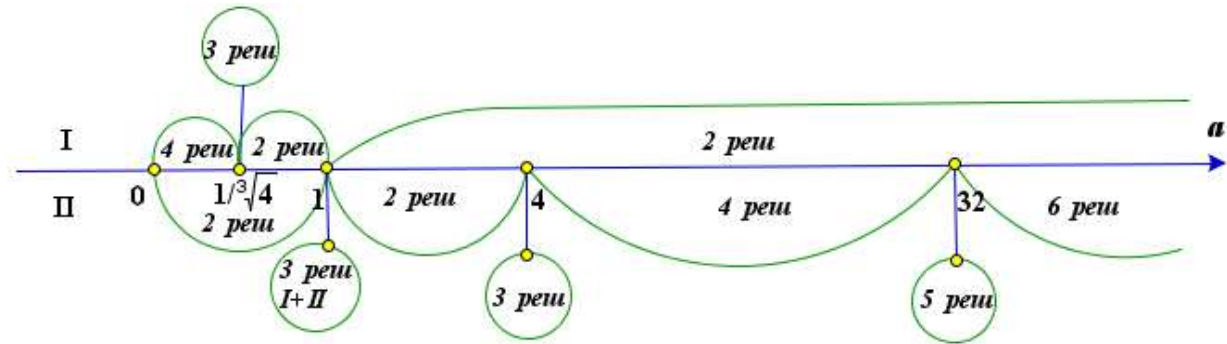
$$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, \quad y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}, \quad x_5 = -a/2, \quad y_5 = -a/4.$$



5) Система имеет 6 различных решений при $a > 32$:

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}, y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}; x_{2/3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 32a}}{2}, y_{2/3} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 32a}}{4},$$

$$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}, x_{5/6} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 32a}}{2}, y_{5/6} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 32a}}{4}.$$



Возможны следующие случаи совпадения решений в I и II случаях:

- 1) $x - \frac{2}{a} = x - 2a, a = 1$, в этом случае 3 решения;
- 2) прямые $y = x - \frac{2}{a}, y = -\frac{x+a}{2}$ и гипербола $y = \frac{4a}{x}$ пересекаются в одной точке, но этот случай возможен при $a > 32$, и в этом случае будет 7 решений.

Ответ: $a \in (0; 1/\sqrt[3]{4}) \cup (4; 32)$,

5. В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180° . Найдите объём тетраэдра, если $BC = 4, \cos \angle BAC = 3/4, \sin \angle CBD = 5\sqrt{7}/16$. (20 баллов)

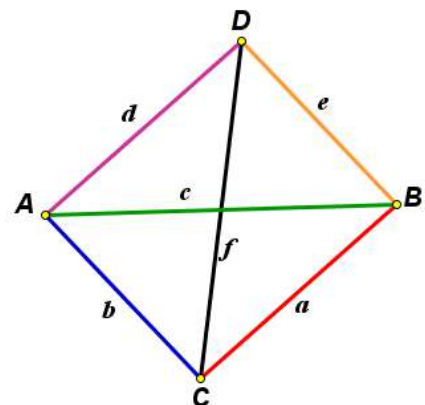
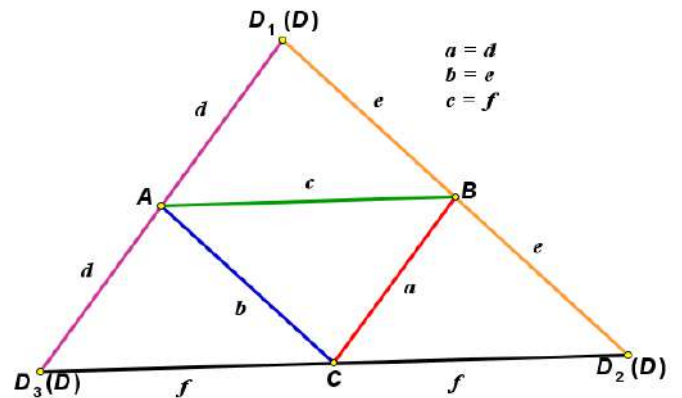
Решение. Сделаем развертку тетраэдра на плоскость ABC относительно сторон треугольника ABC . Поскольку суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180° , то получим треугольник $D_1D_2D_3$, для которого отрезки AB, AC и BC являются средними линиями. Отсюда получаем, что стороны треугольника ABC равны противоположным ребрам тетраэдра. Следовательно, тетраэдр $ABCD$ является равногранным. Обозначим

$BC = a, \angle BAC = \alpha, \angle CBD = \beta, AC = b, AB = c$. Отметим, что $\angle ACB = \beta$. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \beta}$. Поскольку $a = 4, \cos \alpha = 3/4, \sin \beta = 5\sqrt{7}/16$, то

$$\frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16c}{5\sqrt{7}}, \quad c = 5.$$

По теореме косинусов найдем b :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$



$16 = b^2 + 25 - 7,5b$, $b^2 - 7,5b + 9 = 0$, $b = 6$. Второй корень $b = 1,5$ не подходит, поскольку в этом случае угол ACB тупой.

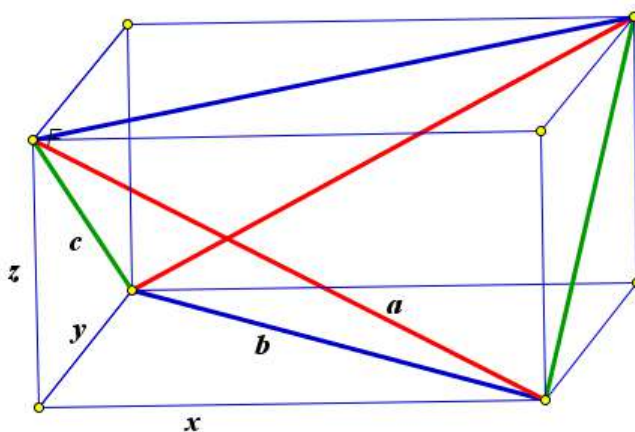
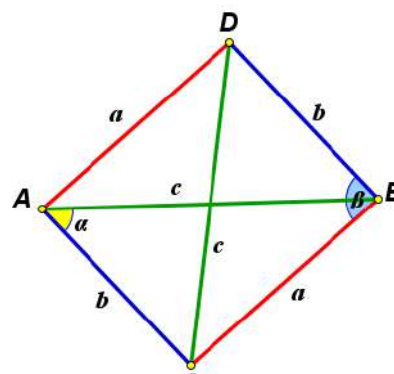
Для того, чтобы найти объем тетраэдра $ABCD$ опишем около него прямоугольный параллелепипед так, что ребра тетраэдра являлись диагоналями граней параллелепипеда. Обозначим стороны параллелепипеда x , y , z . Тогда объем тетраэдра $V = (1 - 4/6)xyz = xyz/3$.

Имеем $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z^2 + y^2 = c^2$, \Rightarrow
 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$,

$y^2 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2)$, $z^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$,
 $V = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}$
 $V = \frac{1}{12} \sqrt{2(4^2 + 6^2 - 5^2)(-4^2 + 6^2 + 5^2)(4^2 - 6^2 + 5^2)}$

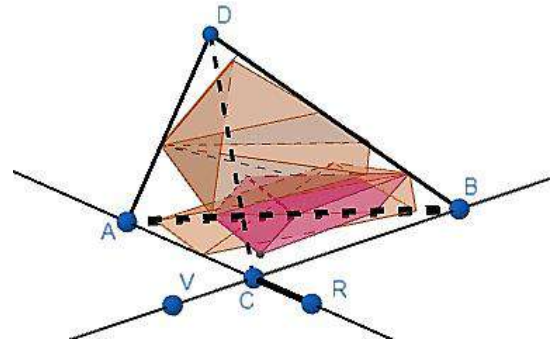
$= \frac{15\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{6}}{4}$.



6. По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы.

1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки С до точки А и от точки С до точки В (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2,5$ м для точек R и V, расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты А, С и С, В соответственно.



Определите расстояние между точками А и В (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки CADB при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB.

2) Из земли торчал негнувшийся кусок арматуры - штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился. (20 баллов)

Решение.

1) Используем подобие треугольников ACB и RCV :

$$\frac{AC}{CR} = \frac{AB}{VR} \Rightarrow AB = \frac{AC}{CR} \cdot VR = \frac{4}{1} \cdot 3 = 12.$$

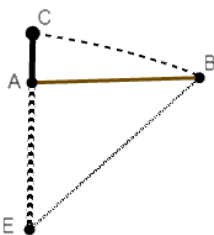
Площадь четырехугольника CADB найдем как сумму площадей треугольников CAB и ABD: площадь первого треугольника найдем как половину произведения длин сторон на синус угла между ними, угол найдем по теореме косинусов.

$$\cos \beta = \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2AB \cdot CB} = \frac{144 + 100 - 16}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{36 + 25 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{57}{6 \cdot 10} = \frac{19}{20} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{39}}{20},$$

$$S_{CAB} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AB \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{39}}{20} = 3\sqrt{39}, \text{ т.к. треугольник CDB равнобедренный,}$$

значит косинус угла при основании равен $\cos \alpha = \frac{CB}{2CD} = \frac{CB}{2 \cdot 2 \cdot CB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \left(\frac{19}{20} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{39}}{20} \right) = \frac{57\sqrt{15}}{2} - \frac{3\sqrt{39}}{2},$$



$$S_{CADB} = \frac{57\sqrt{15}}{2} + \frac{3\sqrt{39}}{2} = \frac{57\sqrt{15} + 3\sqrt{39}}{2} \approx 119,74$$

б) $(AE + AC)^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2 \Rightarrow AE = \frac{AB^2 - AC^2}{2AC} = \frac{1,5^2 - 0,5^2}{2 \cdot 0,5} = 2$

Ответ: а) 12, $\frac{57\sqrt{15}+3\sqrt{39}}{2} \approx 119,74$, б) 2.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 3

Класс: 10

Задача 1 (12 баллов). Дробь $\frac{1}{5}$ записана в виде бесконечной двоичной дроби (в двоичной системе счисления). Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

Задача 2 (16 баллов). Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

Задача 3 (16 баллов). Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH – высота треугольника AMB . Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90° , и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину отрезка BL , если L – точка пересечения BD и AC , а тангенс угла ACH равен $1/18$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система

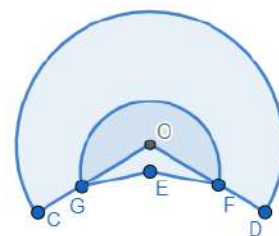
$$\begin{cases} (a|y^3| + a|x^3| - 8)(x^6 + y^6 - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{x^6 y^6} = a \end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений.

Задача 5 (20 баллов). Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC . Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC , $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и N лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1 . Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью γ , если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12.

Задача 6 (20 баллов). Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации - замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.

На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку E , экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой FG окружности с центром в точке E и радиусом $2\sqrt{2}$ м, а также отрезками ее радиусов EF и EG . Затем экскаватор перемещается в точку O и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой CD окружности с центром в точке O и радиусом 6 м, отрезками CG и FD (точки F и G находятся на соответствующих радиусах OC и OD), а с внутренней стороны - большой дугой FG первой окружности с центром в точке E .



Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка O находится в 2 метрах от точки E по направлению к центру металлического завала, угол EOD равен 45° .

Решение варианта №3 (Математика - 10 класс)

1. Дробь $\frac{1}{5}$ записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи? (12 баллов)

Решение. Наименьшим числом вида $2^n - 1$, делящимся на 5, будет число 15. Тогда

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{3}{16-1} = \frac{3}{2^4-1} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right)(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + \dots) =$$

$(2^{-3} + 2^{-4})(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + \dots) = 0,001100110011 \dots = 0, (0011)$ в двоичной системе счисления. Поскольку $2022 = 4 \cdot 505 + 2$, то среди первых 2022 цифр после запятой будет 1010 единиц.

Ответ: 1010.

2. Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета? (16 баллов)

Решение. Рассмотрим 4 варианта раскраски куба.

1) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой и правой 5 способами, затем цвет передней 4 способами и цвет задней 4 способами. Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 480$ способов.

2) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой 5 способами, потом цвет правой 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.

Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

3) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет левой и правой граней 6 способами, затем цвет верхней 5 способами, потом цвет нижней 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.

Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

4) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней грани 6 способами, затем цвет нижней грани 5 способами, потом цвет левой грани 4 способами, затем цвет правой 3 способами, далее цвет передней грани 2 способами и задней 2 способами.

Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 1440$ способов.

Окончательно имеем $480 + 1080 + 1080 + 1440 = 4080$.

Ответ: 4080.

3. Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C , причем $AM = 2, MC = 16$. Отрезок MH – высота треугольника AMB . Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90° , и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите длину отрезка BL , если L – точка пересечения BD и AC , а тангенс угла ACH равен $1/18$. (16 баллов)

Решение. 1. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность с диаметром AB (углы ADB и ACB прямые). Тогда $\angle ABD = \angle ACD$,

$$\angle HAD = 90^\circ - \angle ABD, \angle ADH = \angle ABD = \angle ACD.$$

Треугольники ACD и ADM подобны, и $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD} = \frac{MD}{DC}$, $AD^2 = AC \cdot AM = 2 \cdot 18 = 36$, $AD = 6$.

2. Около четырехугольника $CBHM$ можно описать окружность с диаметром MB (углы MHB и MCB прямые).

$$\angle MCH = \angle MBH = \alpha, \operatorname{tg} \alpha = 1/18.$$

Обозначим $BH = x, BC = y, MH = z$. Тогда $\frac{z}{x} = \frac{1}{18}$, $x = 18z$. Треугольники AMH и ABC подобны. Тогда

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{BC}, \quad \text{или} \quad \frac{2}{\sqrt{y^2+324}} = \frac{\sqrt{y^2+324}-18z}{18} = \frac{z}{y}, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 36 = y^2 + 324 - 18z\sqrt{y^2 + 324}, \\ 2y = z\sqrt{y^2 + 324}, \end{cases} \quad \Rightarrow 36 = y^2 + 324 - 36y, y^2 - 36y + 288 = 0, \\ y_1 = 12, y_2 = 24.$$

$$1) BC = y = 12, z = \frac{4}{\sqrt{13}}, AB = 6\sqrt{13}, \quad 2) BC = y = 24, z = \frac{8}{5}, AB = 30.$$

3. Треугольники ADL и BCL подобны, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$. Пусть $u = BL, v = AL$.

Рассмотрим треугольник ABD . Имеем в **первом случае**: $AB = 6\sqrt{13}, AD = 6, BD = \sqrt{36 \cdot 13 - 36} = 12\sqrt{3}$. Тогда $\frac{6}{12} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{3}-u}{18-v}$, $u = 2v, 18 - v = 24\sqrt{3} - 4v, v = 8\sqrt{3} - 6, BL = 16\sqrt{3} - 12$.

Имеем во **втором случае**: $AB = 30, AD = 6, BD = \sqrt{900 - 36} = 12\sqrt{6}$. Тогда $\frac{6}{24} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{6}-u}{18-v}$, $u = 4v, 18 - v = 48\sqrt{6} - 16v, 15v = 48\sqrt{6} - 18, BL = \frac{16\sqrt{6}-6}{5}$.

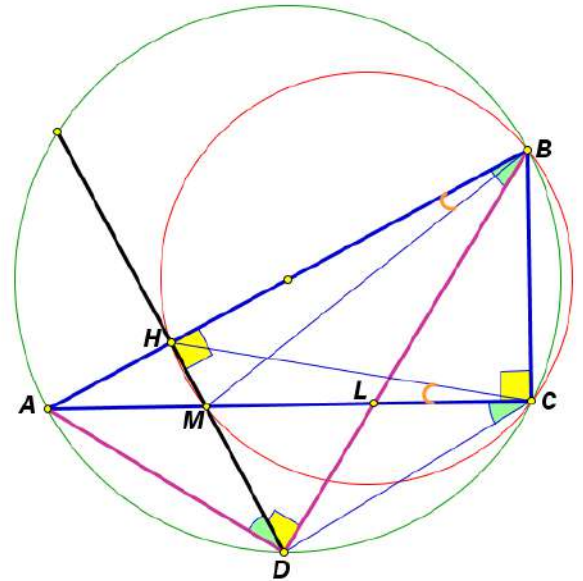
Ответ: $16\sqrt{3} - 12$ или $\frac{16\sqrt{6}-6}{5}$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (a|y^3| + a|x^3| - 8)(x^6 + y^6 - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{x^6 y^6} = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений. (16 баллов)

Решение. Сделаем замену переменных: $x^3 = u, y^3 = v$. Переменные u и v могут принимать любые значения, x и y находятся однозначно. Тогда получим



$$(a|v| + a|u| - 8)(u^2 + v^2 - 3a^2) = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} |v| + |u| = 8/a, \\ |uv| = a, a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |v| + |u| = 8/a, \\ |uv| = a, a > 0, \\ u^2 + v^2 = 3a^2, \\ |uv| = a, a > 0. \end{cases}$$

I. $\begin{cases} |v| + |u| = 8/a, \\ |uv| = a, a > 0. \end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\frac{8}{a} = 2\sqrt{a}, \quad a = 2^3\sqrt{2}.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$$\frac{8}{a} > 2\sqrt{a}, \quad 0 < a < 2^3\sqrt{2}.$$

II. $\begin{cases} u^2 + v^2 = 3a^2, \\ |uv| = a, a > 0. \end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\sqrt{3}a = \sqrt{2}a, \quad a = 2/3.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$$\sqrt{3}a > \sqrt{2}a, \quad a > 2/3.$$

Возможные совпадения решений в I и II случаях:

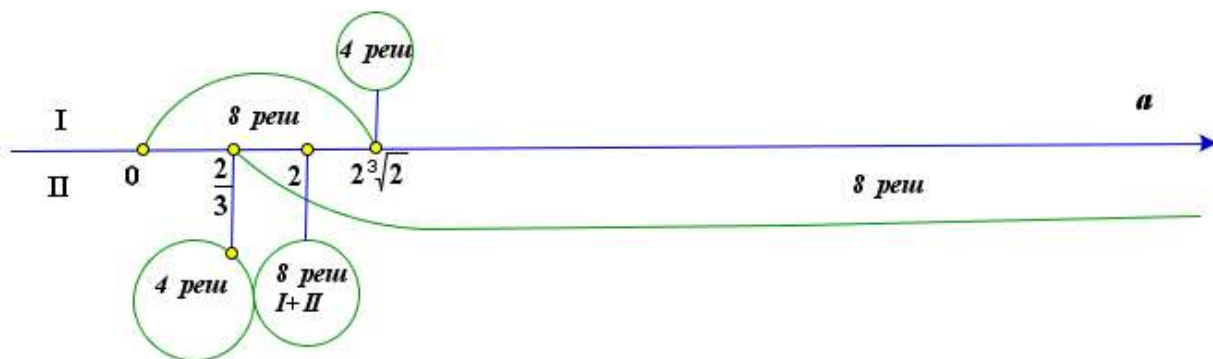
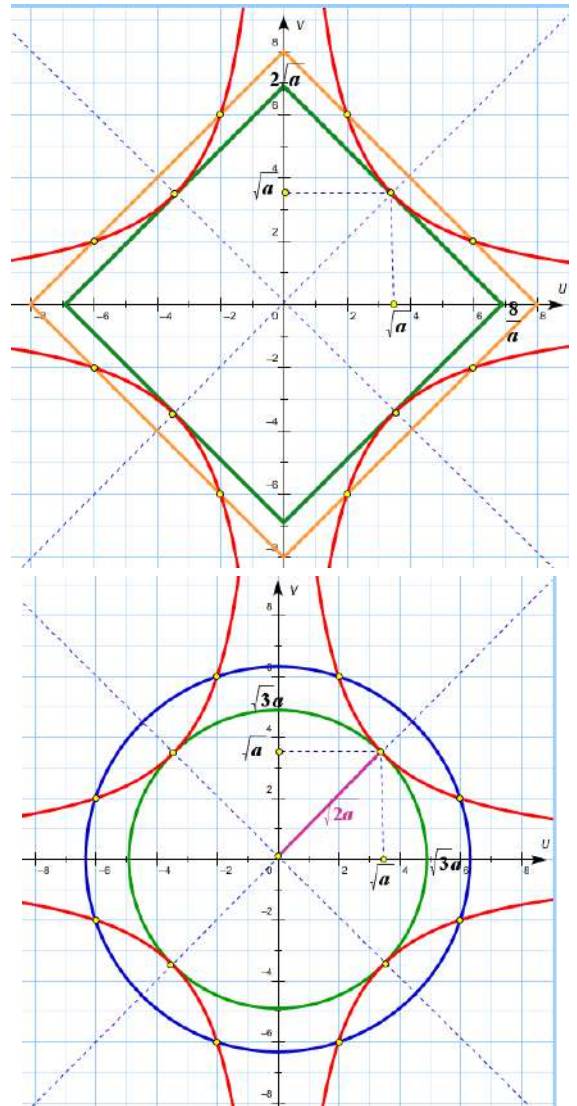
$$\begin{cases} |v| + |u| = 8/a, \\ u^2 + v^2 = 3a^2, \\ |uv| = a, a > 0. \end{cases}$$

Из соображения симметрии можно рассмотреть только случай, когда $u > 0, v > 0$. Тогда

$$\begin{cases} v + u = 8/a, \\ u^2 + v^2 = 3a^2, \\ uv = a, a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + u = 8/a, \\ (u + v)^2 = 3a^2 + 2a, \\ uv = a, a > 0. \end{cases}$$

Имеем $64/a^2 = 3a^2 + 2a, \quad 3a^4 + 2a^3 - 64 = 0,$

$a = 2, 3a^4 + 2a^3 - 64 = (a - 2)(3a^3 + 8a^2 + 16a + 32)$. Многочлен $3a^3 + 8a^2 + 16a + 32$ положительных корней не имеет. При $a = 2$ решения I и II случаев совпадают, и система будет иметь 8 решений.



Ответ: $a \in (0; 2/3) \cup \{2\} \cup (2\sqrt[3]{2}; +\infty)$.

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC . Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC , $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1 . Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью γ , если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12. (20 баллов)

Решение. По условию имеем $AB = a = 8\sqrt{2}$,
 $SO = h = 12$, $KL = b = 2$, $KK_1 = h_0 = 3$.

$PR \parallel AC \parallel KL, RF \parallel SO, RF = h_0$.

$$\Delta RCF \sim \Delta SCO, \quad \frac{CF}{CO} = \frac{RF}{SO} = \frac{h_0}{h} = \frac{1}{4}, \quad CF = \frac{CO}{4}.$$

Плоскость PQR параллельна ABC .

$$GR \perp M_1L_1, GR = \frac{b}{2} = 1. \quad KE \perp BD,$$

$$LE = CO - CF - GR = \frac{3CO}{4} - \frac{b}{2} = 6 - 1 = 5.$$

Обозначим через α угол наклона плоскости γ к плоскости основания ABC . Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_0}{LE} = \frac{3}{5}$.

Пусть точка H – точка пересечения плоскости γ и

ребра SC . Тогда $\angle HOC = \alpha$. Если HU – перпендикуляр, опущенный на плоскость ABC , то $\frac{HU}{OU} =$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\Delta HCU \sim \Delta SCO, \quad \frac{HU}{SO} = \frac{CU}{CO}, \quad \frac{HU}{h} = \frac{CO - OU}{CO}, \quad \frac{HU}{h} = \frac{CO - 3HU}{CO}, \quad \frac{HU}{12} = \frac{24 - 5HU}{24}, \quad 7HU = 24, \quad HU = \frac{24}{7}.$$

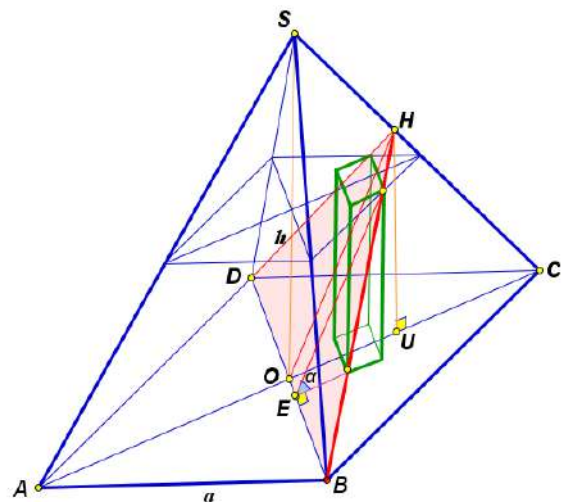
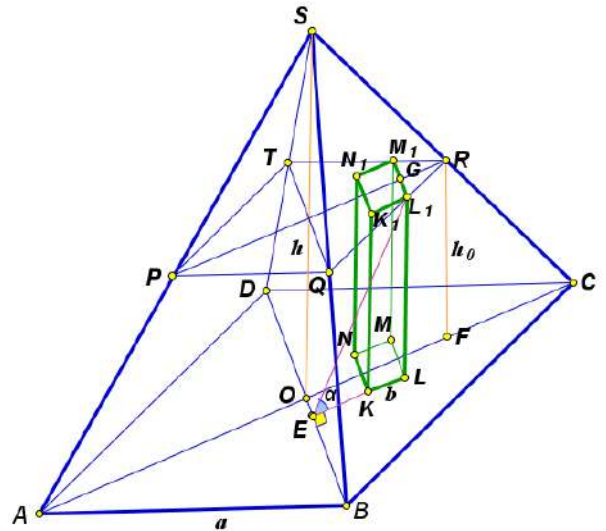
По теореме Пифагора имеем $OH^2 = OU^2 + HU^2$,

$$OH = \frac{HU\sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{7}.$$

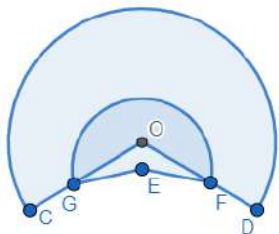
Площадь сечения пирамиды плоскостью γ :

$$S_{\text{сеч}} = \frac{BD \cdot OH}{2} = \frac{64\sqrt{34}}{7}.$$

Ответ: $\frac{64\sqrt{34}}{7}$.



6. Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации - замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.



На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку E , экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой FG окружности с центром в точке E и радиусом $2\sqrt{2}$ м, а также отрезками ее радиусов EF и EG . Затем экскаватор перемещается в точку O и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой CD окружности с центром в точке O и радиусом 6 м, отрезками CG и FD (точки F и G находятся на соответствующих радиусах OC и OD), а с внутренней стороны - большой дугой FG первой окружности с центром в точке E .

Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка O находится в 2 метрах от точки E по направлению к центру металлического завала, угол EOD равен 45° . (20 баллов)

Решение. По теореме синусов для треугольника OEF имеем

$$\frac{OE}{\sin \angle OFE} = \frac{EF}{\sin \angle EOF}, \frac{2}{\sin \angle OFE} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}, \sin \angle OFE = \frac{1}{2},$$

$$\angle OFE = 30^\circ, \angle OEF = 105^\circ.$$

$$\frac{OE}{\sin 30^\circ} = \frac{OF}{\sin 75^\circ}, OF = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$$

Площадь сектора COD : $S_1 = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 270 = 27\pi$.

Площадь сектора FEG : $S_2 = \frac{\pi \cdot 8}{360} \cdot 210 = \frac{14\pi}{3}$.

$$S = S_1 - S_2 + 2S_{OEF} = 27\pi - \frac{14\pi}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{67\pi}{3} + 2(1 + \sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{67\pi}{3} + 2(1 + \sqrt{3})$.

