

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету  
«Математика», осень 2019 г.

8 класс

Вариант № 1

1. (9 баллов) Светлана берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1580-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была  $\{80; 71; 20\}$ ? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.
2. (9 баллов) Два шарика, размерами которых можно пренебречь в данной задаче, движутся по окружности. При движении в одном направлении они встречаются каждые 20 секунд, а при движении в противоположных направлениях – каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися шариками уменьшается на 75 см каждые 3 секунды (пока они не встретятся). Найдите скорость более медленного шарика (в см/сек).
3. (9 баллов) В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна 19 см. Перпендикуляр  $DF$ , проведенный к стороне  $AB$  через ее середину – точку  $D$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите периметр треугольника  $AFC$ , если сторона  $AC$  равна 10 см.
4. (9 баллов) Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 350 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?
5. (12 баллов) Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.
6. (12 баллов) Семья пчеловодов привезла на ярмарку емкости с медом объемом 13, 15, 16, 17, 19, 21 литров. В августе были проданы три емкости целиком, в сентябре еще две, причем получилось, что в августе меда продали вдвое больше, чем в сентябре. Определите, какие емкости освободились в августе. В ответе укажите наибольший из объемов.
7. (12 баллов) В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  является серединой стороны  $CD$ . На стороне  $BC$  взяли точку  $F$  так, что угол  $AEF$  прямой. Найдите длину отрезка  $FC$ , если  $AF=7$ ,  $BF=4$ .
8. (14 баллов) В треугольнике  $ABC$  с  $\angle B = 120^\circ$  проведены биссектрисы  $AA_1, BB_1, CC_1$ .  
Найти  $\angle C_1B_1A_1$ .
9. (14 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|f(x) - 4| = p(x)$ , если  $f(x) = \left| \frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x} \right|$ ,  $p(x) = a$  имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

## Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

### Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2019 г.

8 класс

#### Вариант № 2

- (9 баллов)* Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 19-й раз. При необходимости ответ округлите до сотых по правилам округления.
- (9 баллов)* Маше, Даше и Саше поручено собрать урожай смородины со всех кустов на дачном участке. Маша и Даша вдвоём могут собрать все ягоды за 7 часов 30 минут, Маша и Саша – за 6 часов, а Даша и Саша – за 5 часов. За сколько часов дети соберут все ягоды, работая втроём?
- (9 баллов)* На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle CMA = \angle ANC$ . Отрезки  $MC$  и  $AN$  пересекаются в точке  $O$ , причем  $ON = OM$ . Найдите  $BC$ , если  $AM = 5$  см,  $BM = 3$  см.
- (9 баллов)* Если двузначное число уменьшить на 36, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившегося числового ряда.
- (12 баллов)* На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 7 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.
- (12 баллов)* Мальчики делят улов. Первый взял  $r$  рыб и седьмую часть остатка; второй -  $2r$  рыб и седьмую часть нового остатка; третий –  $3r$  рыб и седьмую часть нового остатка и т.д. Получилось, что таким способом все пойманные рыбы были разделены поровну. Сколько было мальчиков?
- (12 баллов)* В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $E$  расположена на диагонали  $AC$  так, что  $BC = EC$ , точка  $M$  – на стороне  $BC$  так, что  $EM = MC$ . Найдите длину отрезка  $MC$ , если  $BM = 5$ ,  $AE = 2$ .
- (14 баллов)* Дан треугольник  $ABC$ .  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ . Прямые  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$ ,  $O_1O_3$  – биссектрисы внешних углов треугольника  $ABC$ , как показано на рисунке. Точка  $O$  – центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Найти угол между прямыми  $O_1O_2$  и  $OO_3$ .
- (14 баллов)* При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $f(x) = p(x)$  имеет одно решение, если  $f(x) = \left| \frac{2x^3 - x^2 - 18x + 9}{(1,5x + 1)^2 - (0,5x - 2)^2} \right|$ ,  $p(x) = |-2x + 2| + a$ . Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.