

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

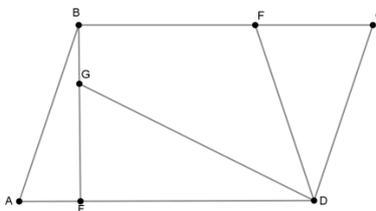
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 1

1. (9 баллов) Увидев лису в нескольких метрах от себя, собака погналась за ней по прямой просёлочной дороге. Прыжок собаки на 23% длиннее прыжка лисы. Существует промежуток времени, за который и лиса, и собака делают по целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что собака за это время успевае сделать на $t\%$ прыжков меньше, чем лиса, где t – целое число. Предполагая, что все прыжки и у собаки, и у лисы одинаковы, найдите, при каком минимальном значении t лиса сможет убежать от собаки?

2. (9 баллов) В параллелограмме $ABCD$ высота $BE=3$, $AE:ED=1:4$. Сторона $BC=5$. На отрезках BE и BC отмечены точки G и F соответственно, так что $BG:GE=1:2$, $BF:FC=3:2$. Определите градусную меру угла FDG .



3. (9 баллов) В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000} = 150$, $d = 0,5$.

Вычислить: $99 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \dots + \frac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right)$.

4. (9 баллов) В $\triangle ABC$ с $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 .

Найти $\angle C_1B_1A_1$.

5. (12 баллов) Скупщики расплачиваются с ловцами жемчуга золотом и кукурузой. Посоветавшись, скупщики решили снизить цену «в золоте» на 5% на первом острове. Тогда «в кукурузе» цена упадет на 7%, так как цены золота и кукурузы связаны на рынке.

А для ловцов жемчуга второго острова из-за пришедшего холодного течения решили снизить цену меньше – «в золоте» на 1%. На сколько процентов упадет цена жемчуга «в кукурузе» для ловцов второго острова? Ответ округлите до сотых после запятой.

6. (12 баллов) Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x; y) = x^2 + 8y + y^2 + 14x - 6$, при условии, что $x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y)$.

7. (12 баллов) Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35×35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.
8. (14 баллов) Найдите сумму всех целых значений s , при которых уравнение $15|p-1|+|3p-|p+c||=4p$ относительно p имеет хотя бы один корень.
9. (14 баллов) Известно, что число вхождений некоторого символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

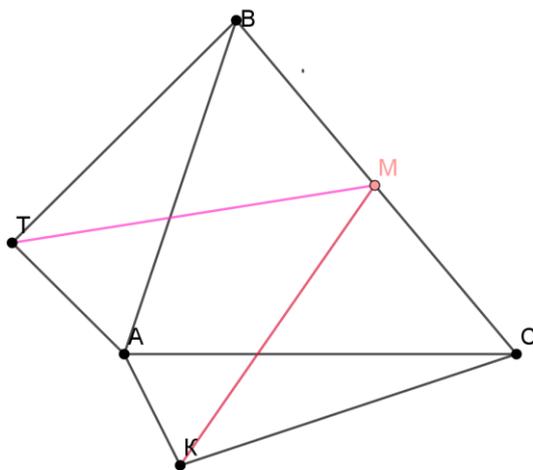
Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2019 г.

10 класс

Вариант № 2

1. (9 баллов) Две сестры собирали смородину: старшая – в четырёхлитровое ведро, а младшая – в ведро вместимостью 3,5 литра. Старшая всё время работала быстрее младшей. Когда старшая сестра собрала три четверти своего ведра, а младшая больше половины своего, девочки поменялись ведрами. Продолжая работать с такой же скоростью, как до обмена ведрами, они закончили работу одновременно. Во сколько раз старшая сестра собирала ягоды быстрее младшей?
2. (9 баллов) На стороне AB и AC треугольника ABC , внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK , так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^\circ$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^\circ$, на стороне BC выбрана точка M так, что $BM=MC$. Определите градусную меру угла KMT .



3. (9 баллов) В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 3$.

Вычислить $A = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A .

4. (9 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ $AB:AD = 1:2$. Точка M середина AB , точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 3:1 считая от точки A . Найти сумму $\angle CAD$ и $\angle AKM$.
5. (12 баллов) Имеется два сплава свинца с оловом. В первом сплаве масса свинца относится к массе олова как 1:2; во втором – как 2:3. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 22 г нового сплава с отношением масс свинца и олова 4:7?
6. (12 баллов) Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1) + 1 = f(x) + \frac{43}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{101}{f(2020)}$, если $f(0) = 2020$.

7. (12 баллов) Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35×35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

8. (14 баллов) Найдите сумму всех целых значений h , при которых уравнение $||r+h|-2r|-3r=7|r-1|$ относительно r имеет не более одного корня.

9. (14 баллов) Таблица, состоящая из 2019 строк и 2019 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 2019 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 2019. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.