

Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 1

1. Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами А и В, причем, доехав до пункта А или В он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта А в пункт В, двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта А в пункт В в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт В в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта В в пункт А поравнялся с Васей.

(12 баллов)

2. Найдите все целочисленные решения неравенства

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2 + z^2 - 38(xy + z) - 40(yz + x) + 4xyz + 761 \leq 0.$$

(12 баллов)

3. Решите неравенство

$$\frac{4x^4 + 1}{4\sqrt{2}} \leq x\sqrt{x^4 - \frac{1}{4}}.$$

(16 баллов)

4. Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n(2^{2n} - 3^n) + 2^n - 7^n$ делится нацело на 65.

(20 баллов)

5. Найдите все значения параметра b , при котором для любого значения параметра $a \in [-1; 1]$ неравенство $x^2 + 6x + 2(a + b + 1)\sqrt{-x^2 - 6x - 5} + 8 < a^2 + b^2 + 2a$ не выполняется хотя бы для одного $x \in [-5; -1]$.

(20 баллов)

6. Первая окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC . Точки A и B лежат на второй окружности с центром в той же точке O . Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq A$), а прямая BC пересекает вторую окружность в точке E ($E \neq B$). Известно, что угол ABC равен углу CAE . Найдите косинус угла BAC . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

(20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 5

1. Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили $\frac{1}{4}$ содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как $\frac{9}{16}$. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки. (12 баллов)

2. Найдите остаток от деления на 11 числа A :

$$A = \frac{-2^1 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^9 + 2^{10}}{2^{-1} - 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-9} - 2^{-10}}. \quad (12 \text{ баллов})$$

3. Решите неравенство

$$\frac{(|x+1| - |x-1|)(x^3 - 7x^2 + 36)}{x^8 + 2x^6 - 6x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0. \quad (16 \text{ баллов})$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{71}{16}} - \sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{87}{16}} = \frac{1}{2}. \quad (20 \text{ баллов})$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$$

имеет ровно одно решение. Укажите решение при найденных значениях параметра a . (20 баллов)

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C длина биссектрисы угла A равна 4, угол $A = 60^\circ$. На серединном перпендикуляре к катету CB в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника OQM , где точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. (20 баллов)