Решение варианта № 1

1. Если натуральное двузначное число уменьшить на 54, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

Решение.

Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ – исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ – число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 54$. Из уравнения видно, что двузначное число больше 54. Начнем исследование с числа десятков равному 6.

X	*уравнение*	*y*	*число*
6	$60+ y = 10y+6+54$	$y = 0$	60 не подходит по условию
7	$70+ y = 10y+7+54$	$y = 1$	71
8	$80+ y = 10y+8+54$	$y = 2$	82
9	$90+ y = 10y+9+54$	$y = 3$	93

Это могут быть числа 71, 82, 93. Медиана ряда равна 82.
Ответ: 82.

2. Найдите сумму всех целых значений c, при которых уравнение $10|p-3| + |2p - |p+c|| = 6p$ относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(p) = 10|p-3| + |2p - |p+c|| - 6p$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при p (10>2+1+6). Отсюда следует, что на всех интервалах до $p=3$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $p=3$ - положителен, $p=3$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(p)=0$ имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(3) \le 0$. Решим неравенство. Обозначим $|3+c| = t$, получим $|6-t| - 18 \le 0$, $(6-t)^2 - 18^2 \le 0$,

$$(24-t)(t+12) \ge 0,\ t \in [-12; 24],\ |c+3| \le 24,\ c \in [-27; 21],$$

сумма целых значений c: -147.
Ответ: -147.

3. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение: Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.
Ответ: 3.

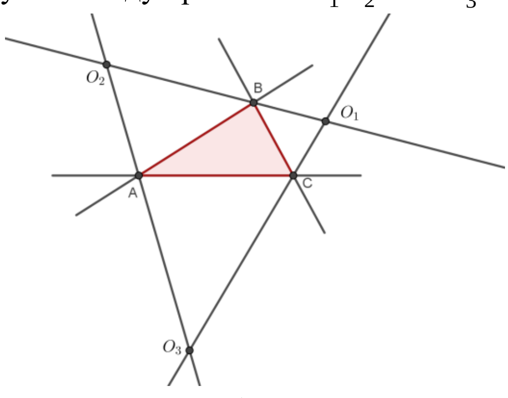
4. Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

Решение: Пусть x – длина прыжка косули, тогда $0,78x$ – длина прыжка волка; y – число прыжков косули за промежуток времени, указанный в условии, $y(1+\frac{t}{100})$ - количество прыжков волка за этот же промежуток времени. Волк не сможет догнать косулю, если путь, преодолеваемый косулей за указанный промежуток времени xy – будет не меньше, чем путь, преодолеваемый волком за тот же промежуток времени: $0,78xy(1+\frac{t}{100})$. Составим неравенство: $0,78xy(1+\frac{t}{100}) \le xy$; $1+\frac{t}{100} \le \frac{50}{39}$; $t \le \frac{1100}{39}$. Максимальное значение t, удовлетворяющее этому неравенству, t = 28%.
Ответ: 28.

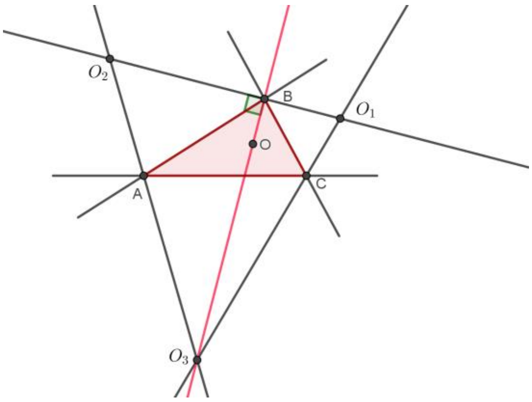
5. Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ем шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {70; 61; 20}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.

Решение. Обозначим 3 числа, как {x; x+a; x+b}, где 0<a<b. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b.
B=70-20=50.
Ответ: 50.

6. Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3.



Решение. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC, следовательно, биссектриса BO перпендикулярна прямой O_1O_2 (как биссектрисы смежных углов треугольника).

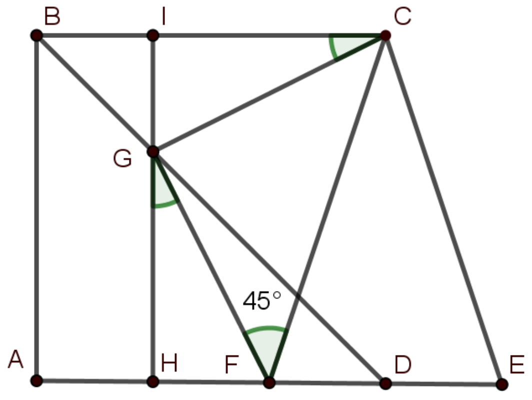


Точка O_3, как равноудаленная от прямых BA и BC, лежит на BO. Следовательно, прямая OO_3, совпадающая с BO, перпендикулярна прямой O_1O_2.

Ответ: 90.

7. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 3 и 4, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AE отмечена точка D так, что AD:DE=3:1; на AD отмечена точка F так, что AF:FD=2:1; на BD отмечена точка G так, что BG:GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.

Решение. Построим высоту IH так, что $G \in IH$ и соединим точки C и G.



1) $\Delta IGC = \Delta GFH$ - по двум катетам, так как $IC = GH = 2,\ IG = HF = 1,$ поэтому $FG = GC,$ $\angle ICG = \angle FGH = \alpha,$ и $\angle HFG = \angle IGC = 90^0 - \alpha.$

2) ΔFGC - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = FD,$

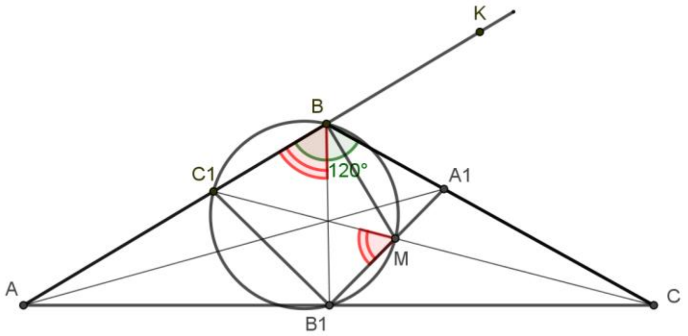
$$\angle HGF + \angle FGC + \angle IGC = 180^0,$$
$$\angle FGC = 180^0 - \angle HGF - \angle IGC,$$
$$\angle FGC = 180^0 - \alpha - 90^0 + \alpha = 90^0.$$

Значит $\angle CFG = 45^0.$

Ответ: 45.

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1MC_1.

Решение.



Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$. Следовательно $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$. Далее, $\angle ABM = \angle C_1BB_1 + \angle B_1BM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, следовательно, вокруг четырехугольника BMB_1C_1 можно описать окружность. Значит $\angle B_1MC_1 = \angle B_1BC_1 = 60^\circ$, как опирающиеся на одну дугу.

Ответ: 60.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бака, наполненного раствором сиропа вылил несколько литров жидкости, долил бак водой, потом вылил в два раза большее количество жидкости и опять долил бак водой. В результате количество сиропа в баке уменьшилось в $\frac{25}{3}$ раза. Определить сколько литров жидкости вылил студент первый раз, если объем бака 1000 литров.

Решение.

1) Пусть содержание сиропа в исходном растворе p % и пусть x литров раствора было вылито в первый раз.
2) Тогда после отлития жидкости осталось $(1000 - x)$ литров раствора, а в нем $(1000 - x)\cdot\frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x)\cdot\frac{100 - p}{100}$ воды.
3) После того как долили x литров воды в баке стало: 1000 литров раствора, а в нем $(1000 - x)\cdot\frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x)\cdot\frac{100 - p}{100} + x$ литров воды.
4) В конце всех переливаний в баке стало: 1000 литров раствора с содержанием сиропа $\frac{3p}{25}$ %, то есть $1000\cdot\frac{\frac{3p}{25}}{100} = \frac{30p}{25}$ литров сиропа и $1000 - \frac{30p}{25}$ литров воды.

5) Тогда до последнего долития $2x$ литров воды в баке было $(1000-2x)$ литров раствора, а в нем $\frac{30p}{25}$ литров сиропа и $1000-\frac{30p}{25}-2x$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения сиропа и жидкости в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(1000-x)\cdot\frac{p}{100}}{1000}=\frac{\frac{30p}{25}}{1000-2x} \Leftrightarrow 2x^2-3000x+\frac{22}{25}\cdot 1000^2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x\in\{1100;400\}$, 1100 литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ:400.

Решение варианта № 2

1. На складе имеется кофе, упакованный в мешки по 15 кг и по 8 кг. Сколько всего мешков с кофе нужно приготовить кладовщику, чтобы отвесить 1998 кг кофе, причём количество мешков с кофе по 8 кг должно быть наименьшим?

Решение. Пусть x – количество мешков по 15 кг, y – количество мешков по 8 кг. Получим уравнение $15x + 8y = 1998$.

$8(x+y) + 7x = 1998$, обозначим $x+y=k$, (1)

$8k + 7x = 1998$,

$7(k+x) + k = 1998$, обозначим $k+x=t$, (2)

$7t + k = 1998$,

$k = 1998 - 7t$. Подставим в (2), $x = 8t - 1998$.

Подставим в (1), $y = 2\cdot 1998 - 15t$.

Так как $x > 0$, $y > 0$, то $250 \le t \le 266$. Чтобы мешков с кофе по 8 кг было наименьшим числом, то $t = 266$. Тогда соответственно $x=130$, $y=6$.

130 и 6 мешков, всего 136 мешков.

Ответ: 136.

2. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение $\left|\left|r+h\right|-r\right|-4r=9\left|r-3\right|$ относительно r имеет не более одного корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(r)=9\left|r-3\right|-\left|\left|r+h\right|-r\right|+4r$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при r (9>1+1+4). Отсюда следует, что на всех интервалах до $r=3$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $r=3$ - положителен, $r=3$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r)=0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(3)\ge 0$. Решим неравенство.

Обозначим $\left|3+h\right|=t$, получим $12-\left|t-3\right|\ge 0$, $(t-3)^2-12^2\le 0$,

$$(t-15)(t+9)\le 0,\ t\in[-9;15],\ \left|h+3\right|\le 15,\ h\in[-18;12],$$

сумма целых значений h: -93.

Ответ: -93.

3. На выставке собак по жеребьёвке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.

Решение. Сумма номеров по жеребьёвке, первоначально равная 1+2+3+…+24=300 и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от 300-24=276 до 300-1=299. Она, кроме того, кратна 23, поскольку в 23 раза больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 276, 277, 278,…,299 только числа 276 и 299 кратны 23, то номер выбывшей собаки либо число 24=300-276, либо 1= 300-299. В обоих случаях среднее арифметическое номеров собак, оставшихся в конкурсе, не совпадает с номером выбывшей собаки.

Ответ: 124.

4. Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами, одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?

Решение. Пусть в большую канистру налилось x л воды, пока в меньшую 4 л. После перестановки в большую налилось $(10-x)$ л, а в меньшую снова 4 л. Так как мощности струй постоянны, отношения объёмов воды, налившейся за одно и то же время, тоже постоянно. Составим уравнение: $\frac{4}{x}=\frac{10-x}{4}$; $x^2-10x+16=0$, которое имеет два корня $x_1=2, x_2=8.$ Два корня уравнения соответствуют двум возможностям: подставить сначала меньшую канистру под более мощную или под более слабую струю. Но в обоих случаях ответ получается один и тот же: одна струя даёт в 2 раза больше воды, чем другая.

Ответ.2.

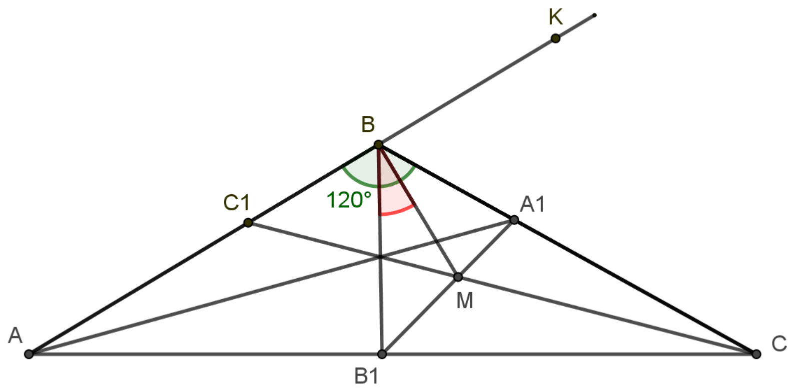
5. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через сколько времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Ответ округлите до сотых.

Решение. Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 21 сближение произойдет через $21\cdot\frac{720}{11}=\frac{15120}{11}$ минут.

Ответ:1374,55.

6. В треугольнике ABC с углом $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти градусную меру угла B_1BM.

Решение.



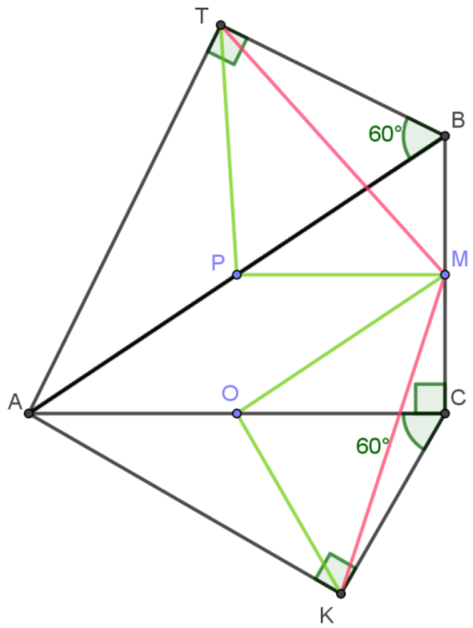
Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^{\circ}$.

Ответ: 30.

7. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC $\left(\angle BCA = 90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 60^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.

Решение. На серединах сторон AB и AC отметим точки P и O, соответственно.
Соединим точку P с точками M и T, а точку O с точками K и M.



Тогда: 1) $\Delta TPM = \Delta KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как

$$AO = \tfrac{1}{2}AC = KO = PM,$$

$$AP = \tfrac{1}{2}AB = TP = OM,$$

$$\angle TPM = \angle TPB + \angle BPM = \angle COK + \angle COM = \angle KOM,$$

Значит TM=MK, $\angle PTM = \angle KMO$ и $\angle PMT = \angle MKO$.

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$:

$$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK.$$

В свою очередь $\angle MOK = \angle KOC + \angle MOC = 60^0 + \angle BAC$.

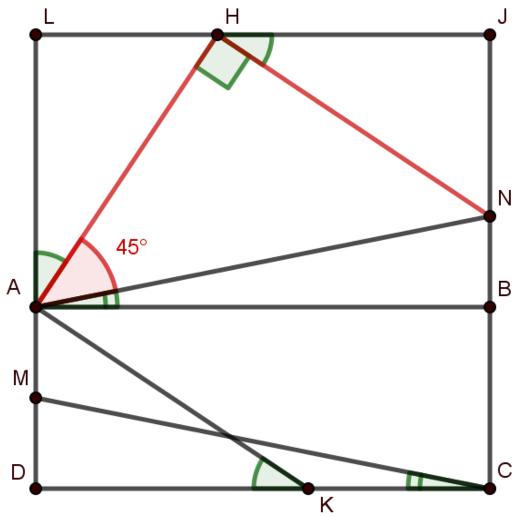
3) $\angle KMT = \angle PMO + \left(\angle PMT + \angle KMO\right) = \angle BAC + \left(180^0 - \angle MOK\right) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC + 180^0 - 60^0 - \angle BAC = 120^0$.

Ответ: 120.

8. Прямоугольные треугольники MDC и ADK имеют общий прямой угол D. Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3, считая от точки C. Точка M - середина стороны AD. Найти сумму градусных мер углов AKD и MCD, если $AD:CD = 2:5$.

Решение. Достроим треугольник ADC до квадрата $LJCD$.



Выберем точку H на стороне LJ, такую что $LH:HJ = 2:3$, точку N на стороне CJ, такую что $CN:NJ = 3:2$ и точку B на стороне CJ, такую что $CB:BJ = 2:3$. Получаем равные треугольники: $\triangle AKD = \triangle ALH = \triangle HJN$.

Далее, $AH = HN$, $\angle AHN = 90^0$, следовательно, $\angle HAN = 45^0$. Из равенства треугольников MDC и NAB, получаем $\angle NAB = \angle MCD$.

Далее, $\angle LAB = \angle LAH + \angle HAN + \angle NAB = 90^0$.

Откуда, уже окончательно, $\angle LAH + \angle NAB = \angle AKD + \angle MCD = 45^0$.

Ответ: 45.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бутыли, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутыль водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутыль водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 36 до 1 процента. Определить объем бутыли в литрах.

Решение.

1) Пусть x - объем бутыли в литрах.
2) Тогда после отлития одного литра жидкости осталось $(x-1)$ литров раствора, а в нем $(x-1)\cdot\frac{36}{100}$ литров сиропа и $(x-1)\cdot\frac{64}{100}$ литров воды.
3) После того как долили один литр воды в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $(x-1)\cdot\frac{36}{100}$ литров сиропа и $(x-1)\cdot\frac{64}{100}+1$ литров воды.

4) В конце всех переливаний в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $x \cdot \frac{1}{100}$ литров сиропа и $x \cdot \frac{99}{100}$ воды.

5) Тогда до последнего долития литра воды в бутыли было $(x-1)$ литров раствора, а в нем $x \cdot \frac{1}{100}$ литров сиропа и $x \cdot \frac{99}{100} - 1$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения жидкости и воды в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(x-1)\cdot\frac{36}{100}}{x\cdot\frac{1}{100}} = \frac{(x-1)\cdot\frac{64}{100}+1}{x\cdot\frac{99}{100}-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot 36}{x\cdot 1} = \frac{(x-1)\cdot 64+100}{x\cdot 99-100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{36x-36}{x} = \frac{64x+36}{99x-100} \Leftrightarrow (36x-36)(99x-100) = x(64x+36) \Leftrightarrow$$

$35x^2 - 72x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{1{,}2; \frac{6}{7}\right\}$. $\frac{6}{7}$ литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 1,2.