Решение варианта № 3

1. *(10 баллов)* Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}-\sqrt{3}}{x^2-16} \leq 0$.

Решение.
ОДЗ исходного неравенства является D= $\{x \in [-3; 9] \setminus \{4\}\}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3}$ на промежутке $-3 \leq x \leq 0$.
Имеем $\sqrt{x+3} \geq 0,\ \ \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3} \Rightarrow\ f(x) \geq 0$ для $x \in [-3; 0]$. (1)
Пусть x принадлежит промежутку $0 < x \leq 9\ \Rightarrow \sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-x} \geq 0\ \Rightarrow f(x) > 0$ для $x \in (0, 9]$. (2)
Из (1) и (2) следует, что если $f(x_0) = 0$, то $x_0 \in [-3; 0]$. (3)
Из (1) и (2) следует $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} \geq 0, \quad \forall x \in D$. (4)
Из (3) и (4), учитывая ОДЗ, следует, что решение исходного неравенства определяется следующим образом:

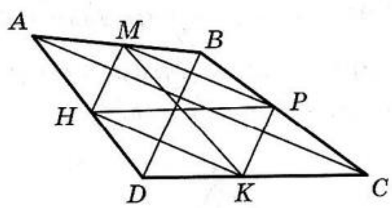
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} \geq 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases} \\ \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \qquad (5)$$

Из (4) следует, что решением системы из совокупности (5), является
$x \in [-3; 4)$. Из (3) следует, что решением совокупности (5) является промежуток $[-3; 4)$.
Ответ: $[-3; 4)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	8
С помощью верных рассуждений установлено, что числитель дроби неотрицательный, но отсутствует обоснованное завершение решения исходного неравенства.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	10

2. *(15 баллов)* Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, имеющего равные диагонали, если длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны 13 и 7.

Решение. Пусть MK и PH - отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём $MK = PH$, $AC = 18, BD = 7$.



Имеем: $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2} AC$ (как средняя линия ΔABC);

$HK \parallel AC$, $HK = \frac{1}{2} AC$ (как средняя линия ΔADC).

$\Rightarrow MP \parallel HK$, $MP = HK \Rightarrow MPKH$ - параллелограмм. А так как $MK = PH$, то четырёхугольник $MPKH$ - прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырёхугольника $ABCD$, поэтому $AC \perp BD$. Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 = 63$(кв.ед.).

Ответ: 63.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. *(15 баллов)* В коробке 22 красных и 25 синих шарика. Их распределили по двум коробкам: в первой должно получиться 24 шарика, а во второй — 23. После распределения посчитали процент синих шариков в каждой коробке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение синих шариков по коробкам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю синих шариков — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждый синий шарик в коробке из 24 штук составляет $1/24$ от общего числа шариков в этой коробке, а в коробке из 23 шариков $1/23$— от общего числа шариков. Значит, если поменять местами синие шарики из коробки с большим количеством шариков и красные шарики из коробки с меньшим количеством шариков, суммарный процент синих шариков в коробках вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда коробка с меньшим количеством шариков полностью состоит из синих шариков, а в коробке с большим количеством шариков — 2 синих шарика и 22 красных шарика.

Решение 2.

	Общее число шариков	Синие шарики	Доля в каждой коробке
1коробка	24 штуки	x	$x/24$
2коробка	23 штуки	25-x	$(25-x)/23$

Значит, суммарная доля синих шариков в двух коробке равна $\frac{x}{24} + \frac{25-x}{23} = -\frac{x}{24 \cdot 23} + \frac{25}{23} = -\frac{x}{552} + \frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка [2; 24], то есть при x=2. Таким образом, в коробке с меньшим количеством шариков лежат только синие шарики, а в коробке с большим количеством шариков — 2 синих шарика и 22 красных шариков.

Ответ. Во второй коробке — 23 синих шарика, в первой — 2 синих шарика и 22 красных шариков.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные продвижения в решении.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	15

4. *(20 баллов)* При каких значениях параметра a уравнение

$$(a+1)(|x-2,3|-1)^2-2(a-3)(|x-2,3|-1)+a-1=0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение. Обозначим $|x-2,3|-1=t$ (1), тогда исходное уравнение примет вид: $(a+1)t^2-2(a-3)t+a-1=0$ (2). Проанализируем уравнение (1): при $t<-1$ оно не имеет решений; при t = -1 – одно решение x = 2,3; каждому $t>-1$соответствует два различных значения x. Таким образом, исходное уравнение может иметь от нуля до четырёх решений. Оно имеет два различных корня в следующих трёх случаях для уравнения (2):

1) линейный случай, если единственный корень больше (-1);

2) $D=0; t_в>-1$;

3) уравнение (2) имеет два различных корня, один из которых больше (-1), а другой меньше (-1). Случай, когда один корень больше (-1), а другой равен (-1) нам не подходит, так как при этом будет три решения. Исследуем перечисленные выше случаи. 1) $a=-1$; $8t-2=0$; $t=\frac{1}{4}>-1$ - следовательно, данное значение параметра включается в ответ.

2) $\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a+1)(a-1)=10-6a=0$; $a=\frac{5}{3}$. Единственный корень - $t_в=\frac{a-3}{a+1}$;

$t_в(\frac{5}{3})=\frac{\frac{5}{3}-3}{\frac{5}{3}+1}=-\frac{1}{2}>-1$, $a=\frac{5}{3}$ включаем в ответ.

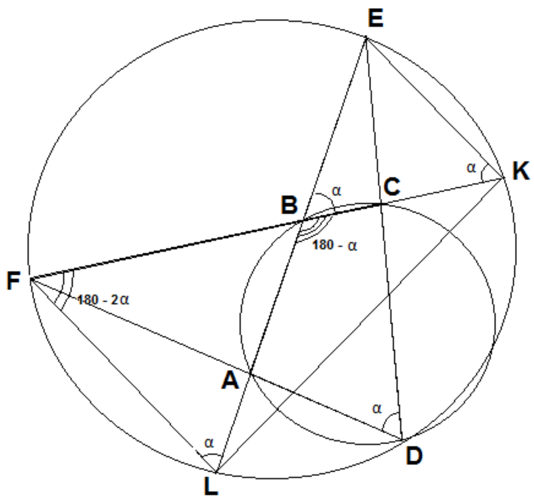
3) Общий случай – корни находятся по разные стороны от (-1) – описывается неравенством $(a+1)f(-1)<0$; $f(-1)=4a-6$; $(a+1)(4a-6)<0$; $a\in(-1;\frac{3}{2})$. Возможно решение через теорему Виета.

Ответ: $[-1;\frac{3}{2})\cup\{\frac{5}{3}\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном ходе решения ответ отличается от правильного одной точкой или правильный ответ недостаточно обоснован.	15
Сделана замена переменной и на новую переменную определены правильные ограничения. Делаются попытки выписать какие-то ограничения для коэффициентов в связи с условиями на новую переменную, но они правильны только частично.	10
Сделана замена переменной, задача сведена к исследованию квадратного трёхчлена с параметром, но рассуждения ограничиваются рассмотрением дискриминанта.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. *(20 баллов)* Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи DA и CB в точке F. Луч BA пересекает описанную вокруг треугольника DEF окружность в точке L, а луч BC пересекает ту же окружность в точке K. Длина отрезка LK равна 5, $\angle EBC = 15^0$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника EFK.

Решение.



$\angle FLE = \angle FDE = \angle FKE = \alpha$, так как углы опираются на дугу FE.
$\angle EBK = \angle FDE = \alpha$, так как четырехугольник $ABCD$ вписанный.
ΔBLF равнобедренный, так как $\angle FLB = \angle FBL = \angle EBK = \alpha$.

Тогда $\angle BFL = 180 - 2\alpha \Rightarrow \sin\angle BFL = \sin 2\alpha = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$. $2R = \frac{LK}{\sin\angle LFK} = 10 \Rightarrow R = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Доказано, что ΔBLF равнобедренный.	15
Доказано, что $\angle EBK = \angle FDE = \alpha$.	10
Доказано , что $\angle FLE = \angle FDE = \angle FKE = \alpha$.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. *(20 баллов)* Существуют ли пять попарно различных целых числа таких, что сумма любых четырех из них была бы квадратом натурального числа?

Решение. Покажем способ построения искомой последовательности. Рассмотрим первые пять квадратов: 1, 4, 9, 16, 25 (можно брать любые пять разных).

Тогда первое число – это $1+4+9+16+25-4\cdot 25=-45$, второе – это $1+4+9+16+25-4\cdot 16=-9$, третье – это $1+4+9+16+25-4\cdot 9=19$, четвертое – это $1+4+9+16+25-4\cdot 4=39$, а пятое – это $1+4+9+16+25-4\cdot 1=51$. Действительно, если сложить любые четыре из них, то в сумме получится один из пяти исходных квадратов, умноженный на 4, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: да, например, -45, -9, 19, 39, 51.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется логическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

Решение варианта № 5

1. *(10 баллов)* Решить неравенство: $\frac{|3x^2+8x-3|+|3x^4+2x^3-10x^2+30x-9|}{|x-2|-2x-1} \leq 0$.

Решение. ОДЗ: $|x-2|-2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x\neq\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 2 \\ x\neq -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Числитель дроби больше или равен 0. Поэтому, с учетом ОДЗ, получим совокупность: $\left[\begin{array}{c} |x-2|-2x-1<0 \\ |3x^2+8x-3|+|3x^4+2x^3-10x^2+30x-9|=0 \end{array}\right.$

1. Решаем первое неравенство:

   $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-2-2x-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ -x+2-2x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\geq 2 \\ \frac{1}{3}<x<2 \end{array}\right. \Rightarrow x > \frac{1}{3}$.

2. Решим теперь уравнение из рассматриваемой совокупности. Оно имеет решение тогда и только тогда, когда каждый модуль равен 0:

   $\begin{cases} 3x^2+8x-3=0 \\ 3x^4+2x^3-10x^2+30x-9=0 \end{cases}$.

   Решим первое уравнение:

$x = \frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6} \Longrightarrow \quad x_1 = -3, \; x_2 = \frac{1}{3}$.

Подставляя x_1 и x_2 во второе уравнение системы видим, что они являются корнями:

$3(-3)^4+2(-3)^3-90-90-9=189-189=0$,

$3\left(\frac{1}{3}\right)^4+2\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{10}{9}+1=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=0$.

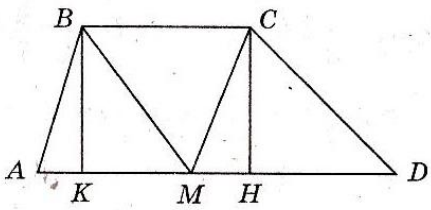
Но $x_2=\frac{1}{3}$ не ответ по ОДЗ, а $x_1=-3$ является решением системы, а, значит, и решением исходного неравенства.

Ответ: $\{-3\} \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	8
С помощью верных рассуждений получены нули числителя дроби, но отсутствует обоснованное завершение решения исходного неравенства.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	10

2. *(15 баллов)* Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 12 см, а длины биссектрис – 15 см и 13 см.

Решение. Пусть отрезок BK - высота данной трапеции $ABCD$ (BK=CH=12), BM и CM – биссектрисы углов соответственно ABC и BCD, причём BM=15, CM=13. В прямоугольных треугольниках *BKM* и *CHM* по теореме Пифагора находим соответственно:



$$KM = \sqrt{BM^2 - BK^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9;$$

$$MH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Обозначим: $HD = x, AK = y$.

Так как $\angle ABM = \angle CBM$ (*BM* – биссектриса угла *ABC*) и $\angle CBM = \angle AMB$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей *BM*), то $\angle ABM = \angle AMB$, значит $\triangle ABM$ - равнобедренный. При этом $AB = AM = KM + AK = 9 + y$. В прямоугольном $\triangle ABK$ имеем: $AB^2 = AK^2 + BK^2$ или $(9+y)^2 = y^2 + 144 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = 3{,}5$.

Тогда $AB = AM = 9 + 3{,}5 = 12{,}5$.

Аналогично, так как $\angle BCM = \angle MCD$ (*CM* – биссектриса $\angle BCD$) и $\angle BCM = \angle CMD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\angle MCD = \angle CMD$, значит $\triangle CMD$ - равнобедренный, при этом $CD = MD = MH + HD = 5 + x$.

В прямоугольном $\triangle CHD$ имеем $CD^2 = CH^2 + HD^2$ или $(5+x)^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 10x = 119 \Rightarrow x = 11{,}9$. Тогда: $CD = MD = 5 + 11{,}9 = 16{,}9$.

Получаем: $AD = AM + MD = 12{,}5 + 16{,}9 = 29{,}4; BC = KH = 5 + 9 = 14.$

Теперь найдем площадь трапеции: $S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot CH = \dfrac{29{,}4+14}{2} \cdot 12 = 260{,}4$ (см^2).

Ответ: 260,4.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

3. *(15 баллов)* Два повара для приготовления вишнёвого варенья смешали вишню и сахар, первый положил на две части вишни одну часть сахара, второй – на три части вишни две части сахара. Сколько килограммов каждой смеси нужно взять, чтобы получить 1,9 килограммов смеси, в которой на двенадцать частей вишни приходится семь частей сахара?

Решение.

	Сахар	вишня
1 повар	x	$2x$
2 повар	$2y$	$3y$
новая смесь	$x+2y$	$2x+3y$

1. $\dfrac{x+2y}{2x+3y}=\dfrac{7}{12}$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $12x+24y=14x+21y$, $\prec\!\!=\!\!\succ$ $2x=3y$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $x=1{,}5y$.

2. $x+2y+2x+3y=1{,}9$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $3x+5y=1{,}9$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $4{,}5y+5y=1{,}9$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $9{,}5y=1{,}9$ $\prec\!\!=\!\!\succ$
$y=0{,}2$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ $x=0{,}3$ $\prec\!\!=\!\!\succ$ смеси 1-го повара надо взять: $3x$ – 0,9кг; смеси 2-го повара: $5y$ – 1кг.

Ответ: 1 повар – 0,9 кг, 2 повар – 1 кг.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменных, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

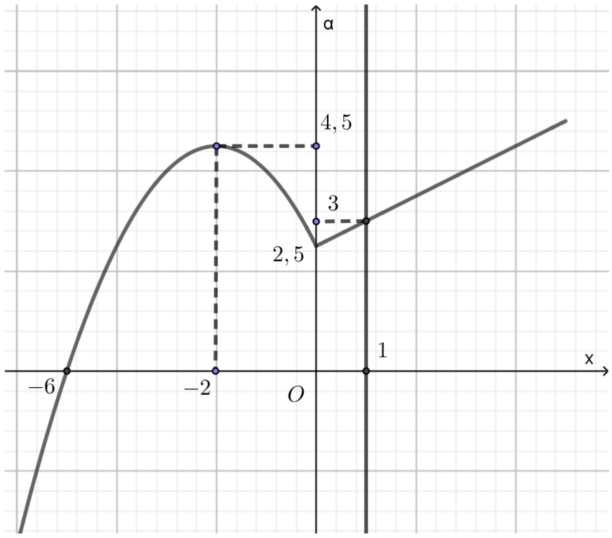
4. *(20 баллов)* Определите количество решений уравнения

$$a(x+|x|-2)=x^2+4x-5$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение. Рассмотрим графическое решение задачи. Выразим a через x и построим график соответствия в осях (x; a) (данное соответствие не является функциональным). Раскроем модуль:

1) $x\ge 0$, $2a(x-1)=(x-1)(x+5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ a=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$. Построим вертикальную прямую и луч с началом в точке с координатами (0;2,5) (см. рисунок).



2) $x<0$, $-2a=x^2+4x-5$, $a=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x-5)$ - квадратный трёхчлен, график – часть параболы, соответствующая $x<0$. Построим его в тех же осях (см. рисунок). Координаты вершины параболы (-2;4,5). Графики соединяются в точке (0; 2,5). Луч $a=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$ пересекает вертикальную

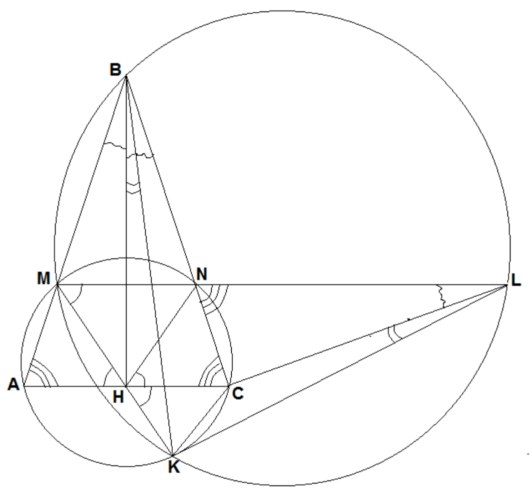
прямую $x=1$ в точке с координатами (1;3). Количество решений уравнения при каждом значении параметра соответствует количеству точек пересечения горизонтальной прямой $a=const$ и графика построенного соответствия. По графику выпишем ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;2,5)$ - два решения; $a=2,5$ - три решения; $a\in(2,5;3)$ - четыре решения; $a=3$ - три решения; $a\in(3;4,5)$ - четыре решения; $a=4,5$ - три решения; $a\in(4,5;+\infty)$ - два решения.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Ответ отличается от правильного одной – двумя точками (крайними или отдельными).	15
Ученик не заметил, что некоторые значения переменной являются решениями при любом значении параметра, остальное верно или получено только больше половины правильных результатов по какой-то причине (например, вершина параболы неправильно найдена) при правильном ходе решения.	10
Решение начато в правильном направлении (раскрыт модуль, делаются попытки исследования количества решений каждого уравнения), но не завершено или ответ неверен.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. *(20 баллов)* Окружность проходит через вершины A и C равнобедренного треугольника $ABC\left(AB=BC\right)$ и пересекает стороны AB и BC в точках M и N, соответственно. MK, хорда этой окружности, равная по длине $2\sqrt{5}$, содержит точку H, лежащую на AC и являющуюся основанием высоты треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная BC, пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MKL, если $\cos\angle ABK=\dfrac{2}{3}$.

Решение.



Четырехугольник $AMNC$ - равнобедренная трапеция. $\Delta AMH=\Delta HNC$ - по двум сторонам и углу между ними.

$$\angle AHM = \angle HMN = \angle MNH = \angle NHC = \angle CHK = 180^0 - \angle NCK,$$
$$\angle MAC = \angle ACN = \angle NCA,$$
$$\angle KHB = \angle KHC + 90^0 = 180^0 - \angle NCK + 90^0 = \angle KCL,$$

$\angle AMK = \angle ACK = \angle HNC$ - как углы равных треугольников и как углы, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, ΔHNC подобен ΔHCK и ΔBHC подобен ΔNLC по двум углам. $\frac{KC}{KH} = \frac{NC}{CH} = \frac{LC}{HB}$ и учитывая, что $\angle KHB = \angle KCL$, получаем подобие ΔKCL и ΔBHK $\Rightarrow \angle CLK = \angle HBK \Rightarrow \angle MBK = \angle MLK$, а значит точки K, M, B, L лежат на одной окружности и $R = \frac{MK}{2\sin\angle ABK} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}/3} = 3.$

Ответ: 3.

Содержание критерия	**Баллы**
Задача решена верно.	20
Доказано, что точки K, M, B, L лежат на одной окружности.	17
Доказано подобие ΔKCL и ΔBHK.	15
Доказано, что ΔBHC подобен ΔNLC.	12
Доказано, что $\Delta AMH = \Delta HNC$ или ΔHNC подобен ΔHCK.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. *(20 баллов)* Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме пяти попарно различных квадратов целых чисел, таких, что среди них есть число 7^2?

Решение. Покажем возможный способ построения искомого числа. Воспользуемся формулой $n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$. То есть,

$$7^2+24^2 = 25^2,\ 25^2+312^2=313^2,\ 313^2+48984^2 = 48985^2.$$

Следовательно, $48985^2=0^2+7^2+24^2+312^2+48984^2$.

Ответ: да, например, $48985^2=0^2+7^2+24^2+312^2+48984^2$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется логическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20