Решение варианта № 1

1. Светлана берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1580-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {80; 71; 20}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.

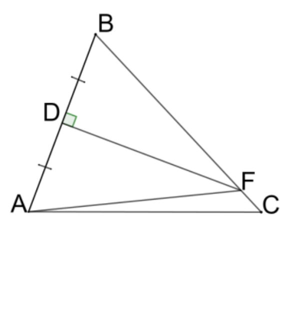
Решение:
Обозначим 3 числа, как $\{x;\ x+a;\ x+b\}$, где $0<a<b$. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b. $B=80-20=60$.
Ответ: 60.

2. Два шарика, размерами которых можно пренебречь в данной задаче, движутся по окружности. При движении в одном направлении они встречаются каждые 20 секунд, а при движении в противоположных направлениях – каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися шариками уменьшается на 75 см каждые 3 секунды (пока они не встретятся). Найдите скорость более медленного шарика (в см/сек).

Решение:
Обозначим скорость более быстрого шарика v, а более медленного u. При движении в одну сторону более быстрый шарик догоняет более медленный тогда, когда разница пройденных ими расстояний становится равной длине круга. По условию задачи составим систему двух линейных уравнений. $\begin{cases}(u+v)\cdot 4=(v-u)\cdot 20\\(u+v)\cdot 3=75\end{cases}$. Откуда $u=\dfrac{2}{3}v, v=15см/с; u=10см/с.$
Ответ: 10.

3. В треугольнике ABC сторона BC равна 19 *см*. Перпендикуляр DF, проведенный к стороне AB через ее середину – точку D, пересекает сторону BC в точке F. Найдите периметр треугольника AFC, если сторона AC равна 10*см*.

Решение:



Треугольник ABF ($BF = AF$) равнобедренный, так как $DF \perp AB$, D–середина AB. $P_{AFC} = AF + FC + AC = BF + FC + AC = BC + AC = 29$ *см*.
Ответ: 29 см.

4. Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 350 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?

Решение.
Пусть x – количество карандашей, y – количество ручек. Получим уравнение $13x+20y=355$
$13(x+y)+7y=355$, обозначим $x+y=t$ (1)

$13t+7y=355$

$7(t+y)+6t=355$, обозначим $t+y=k$ (2)

$7k+6t=355$

$6(k+t)+k=355$, обозначим $k+t=n$ (3)

$6n+k=355$

$k=355-6n$. Подставим в (3), $t=7n-355$

Подставим в (2), $y=710-13n$

Подставим в (1), $x=20n-1065$. Так как $x>0$, $y>0$, то $n=54$. Тогда соответственно $x=8$, $y=15$.

8 карандашей и 15 ручек, всего 23 штуки.

Ответ: 23.

5. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

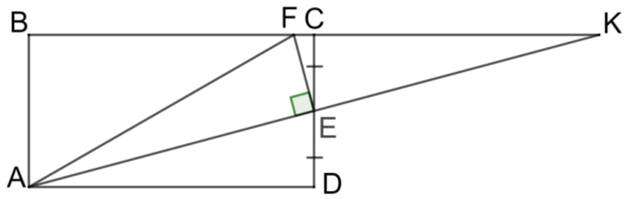
Решение:
Сумма чисел на листе, первоначально равная 1+2+3+…+20=210 и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от 210-20=190 до 210-1=209. Она, кроме того, кратна 19, поскольку в 19 раз больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 190, 191, 192,…209 только числа 190 и 209 кратны 19, то стёрли либо число 20=210-190, либо 1= 210-209. В обоих случаях среднее арифметическое чисел, оставшихся на листе, не совпадает со стёртым числом.
Ответ:21.

6. Семья пчеловодов привезла на ярмарку емкости с медом объемом 13, 15, 16,17, 19,21 литров. В августе были проданы три емкости целиком, в сентябре еще две, причем получилось, что в августе меда продали вдвое больше, чем в сентябре. Определите, какие емкости освободились в августе. В ответе укажите наибольший из объемов.

Решение:
Всего было привезено меда 13+15+16+17+19+21=101 л. Количество проданного меда делится на три. Значит, непроданная ёмкость имеет объём, дающий при делении на 3 остаток 2(как и 101),т.е. 17 л. Продали 101-17=84 л, причем в сентябре треть от 84 л-28 л. Это только набор 13 и 15 л. В августе проданы были емкости 16,19,21 л. Наибольший из них 21 л.
Ответ: 21.

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка Eявляется серединой стороны CD. На стороне BC взяли точку F так, что угол AEF прямой. Найдите длину отрезка FC, если $AF=7$, $BF=4$.

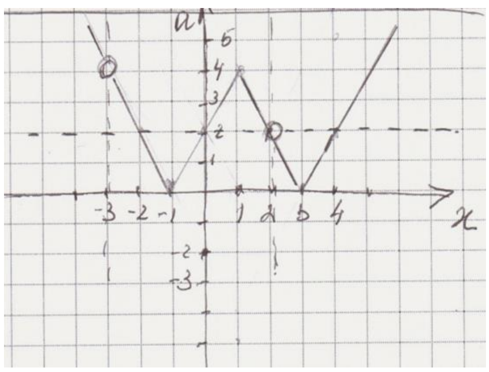
Решение:



Пусть прямые AE и BC пересекаются в точке К, тогда треугольники AEDиKCE равны ($\angle AED = \angle CED$как вертикальные, CE=ED, $\angle ADE = \angle KCE = 90^o$), следовательно, CK= AD, AE = EK. Треугольник AFKравнобедренный ($FE \perp AK$, Eсередина AK), а значит AF = FK = 7.
Так как AD = CK и AD = BC,получаем BK = BF+FK = 2(BF+FC). FC = 5,5-4=1,5 *см*.
Ответ: 1,5 см.

8. В треугольнике ABC с $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Найти $\angle C_1B_1A_1$.
Решение:
Продолжим сторону AB за точку В, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а, значит, точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK.
Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а, значит, равноудалена от его сторон. Получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а, значит, лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$.
Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.
Следовательно $\angle C_1B_1A_1 = 90^0$, как угол между биссектрисами смежных углов.
Ответ: $\angle C_1B_1A_1 = 90^0$**.**

9. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $|f(x) - 4| = p(x)$, если $f(x) = \left|\frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x}\right|$, *p(x) = a* имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.
Решение:



Упростим $f(x) = \left|\frac{x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-4x+4}{2-x}\right|$, получим $f(x) = |2x - 2|$, где $x\neq$ - 3, $x\neq$ 2 .

Решим уравнение $\left||2x - 2| - 4\right| = a$, где $x\neq$ - 3, $x\neq$ 2 графически в системе *xOa*.

Уравнение имеет три решения при a = 2.

Произведение равно 2.

Ответ: 2.

Решение варианта № 2

1. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 19-й раз. При необходимости ответ округлите до сотых по правилам округления.

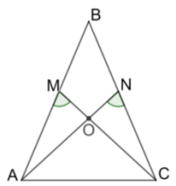
Решение:
Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 19 сближений это 19*720/11=13680/11 минут.
Ответ:1243,64.

2. Маше, Даше и Саше поручено собрать урожай смородины со всех кустов на дачном участке. Маша и Даша вдвоём могут собрать все ягоды за 7 часов 30 минут, Маша и Саша – за 6 часов, а Даша и Саша – за 5 часов. За сколько часов дети соберут все ягоды, работая втроём?

Решение: Обозначим всю работу за 1. Пусть x (частей всей работы в час) – производительность труда Маши, y–Даши и z–Саши. Так как при совместной работе производительности труда складываются, составим систему уравнений по условию задачи: $\begin{cases}(x+y)\cdot 7{,}5=1\\(x+z)\cdot 6=1\\(y+z)\cdot 5=1\end{cases}$; $\begin{cases}(x+y)=\dfrac{2}{15}\\(x+z)=\dfrac{1}{6}\\(y+z)=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

Складывая все уравнения системы, получим: $2(x+y+z)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$; $x+y+z=\dfrac{1}{4}$.
Таким образом, втроём дети соберут всю смородину за 4 часа.
Ответ: 4.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA=\angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON=OM$. Найдите BC, если AM = 5*см*, BM = 3 *см*.
Решение:



Треугольники AMO и CNO равны ($\angle AMO=\angle CNO$, ON=OM, $\angle MOA=\angle NOC$,как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $AM=NC$, $\angle MAO=\angle NCO$ и $OA=OC$. Получаем, что треугольник AOC равнобедренный, а, значит, углы CAO и ACO равны. Откуда треугольник ABC равнобедренный и AB = BC = 8 *см*.

Ответ: 8 см.

4. Если двузначное число уменьшить на 36, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившегося числового ряда.

Решение.
$\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ – число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 36$

Из уравнения видно, что двузначное число больше 36. Начнем исследование с числа десятков, равному 4.

X	***уравнение***	***y***	***число***
4	$40+ y = 10y+4+36$	$y = 0$	40 не подходит по условию
5	$50+ y = 10y+5+36$	$y = 1$	51
6	$60+ y = 10y+6+36$	$y = 2$	62
7	$70+ y = 10y+7+36$	$y = 3$	73
8	$80+ y = 10y+8+36$	$y = 4$	84
9	$90+ y = 10y+9+36$	$y = 5$	95

Это могут быть числа 51,62,73, 84, 95. Среднее арифметическое равно 73.
Ответ: 73.

5. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 7 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение:
Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз.
Ответ: 1.

6. Мальчики делят улов. Первый взял r рыб и седьмую часть остатка; второй - $2r$ рыб и седьмую часть нового остатка; третий – $3r$ рыб и седьмую часть нового остатка и т.д. Получилось, что таким способом все пойманные рыбы были разделены поровну. Сколько было мальчиков?

Решение:
Пусть x-количество мальчиков; y- количество полученных каждым рыб. Тогда последний мальчик взял xr рыб (остатка быть не могло, иначе не было бы деления поровну), тогда $y=xr$. Предпоследний

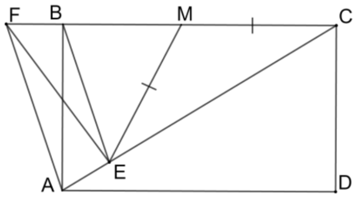
мальчик взял $(x-1)r+\frac{xr}{6}=y; т.к. xr - это \frac{6}{7}$ от предпоследнего остатка, значит, последний остаток $\frac{7}{6}xr$, а его седьмая часть $\frac{xr}{6}$.

Тогда $(x-1)r+\frac{xr}{6}=xr; 6r=xr; x=6.$

Ответ: 6.

7. В прямоугольнике *ABCD* точка *E* расположена на диагонали *AC* так, что *BC* = *EC*, точка *M* – на стороне *BC* так, что *EM* = *MC*. Найдите длину отрезка *MC*, если *BM* = 5, *AE* = 2.

Решение:

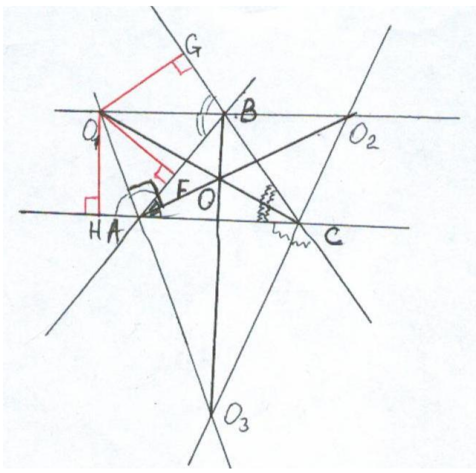


Проведем AF параллельно BE (точка F принадлежит прямой BC), тогда $\angle CBE=\angle CFA$, $\angle CEB=\angle CAF$. Учитывая, что BC = CE получаем, что треугольник FCA равнобедренный, следовательно FC = AC и FB = AE. Треугольники FBA и AEF равны, так как FB = AE, $\angle AFB=\angle FAE$, AF- общая. Получаем, что $\angle FBA=\angle AEF=90^o$, откуда $\angle FEC=90^o$. Треугольник FCE прямоугольный и MC = ME, а значит FM = MC и $FM=FB+BM=AE+BM=MC=7$.

Ответ: 7.

8. Дан треугольник *ABC*. $\angle A=\alpha, \angle B=\beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника *ABC*, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Найти угол между прямыми O_1O_2 и OO_3.

Решение:



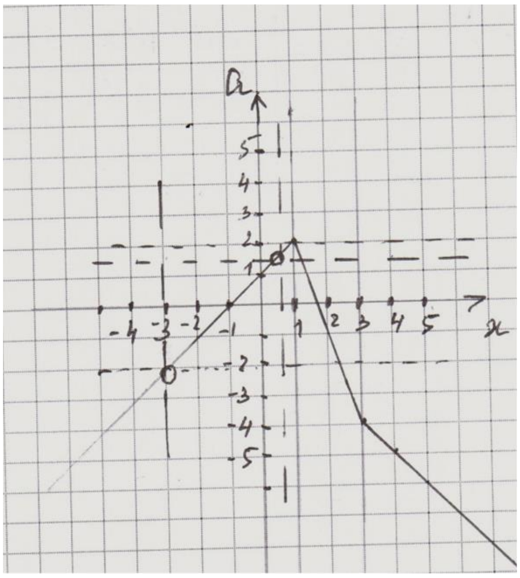
Докажем, что биссектрисы двух внешних углов и одного внутреннего пересекаются в одной точке. Пусть O_1G, O_1H, O_1F – перпендикуляры на *BC, AC* и *AB* соответственно. Тогда треугольники AHO_1 и BFO_1, BFO_1 и BGO_1 прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $HO_1=GO_1$. Значит, O_1 равноудалена от сторон угла C, то есть CO_1 – биссектриса угла C. Аналогично доказывается, что AO_2 и BO_3 биссектрисы углов A и B. Точка O -

точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Угол O_1AO_2 прямой, так как образован биссектрисами смежных углов. Аналогично прямыми являются углы O_1BO_3 и O_1CO_2, а, следовательно, O – точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, O_3O перпендикулярна O_1O_2.

Ответ: 90^o.

9. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3-x^2-18x+9}{(1,5x+1)^2-(0,5x-2)^2}\right|$, *p(x)* $=|-2x+2|+a$. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение.



Упростим $f(x) = \left|\frac{2x^3-x^2-18x+9}{(1,5x+1)^2-(0,5x-2)^2}\right|$, получим $f(x) = |x-3|$, где $x \neq 0,5$, $x \neq -3$.

Решим уравнение $|x-3| = |-2x+2| + a$, где $x \neq 0,5$, $x \neq -3$ графически в системе *xOa*.

1) $\begin{cases} x < 1 \\ -x+3 = -2x+2+a \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ a = x+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ -x+3 = 2x-2+a \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ a = -3x+5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \ge 3 \\ x-3 = 2x-2+a \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 3 \\ a = -x-1 \end{cases}$

Уравнение имеет одно решение при *a* = -2, *a* =2, *a* =1,5.
Сумма равна 1,5

Ответ: 1,5.