

## Решение варианта № 4

1. (10 баллов) Творческий конкурс в институт состоялся из четырех заданий. Всего абитуриентов было 70 человек. Первое испытание успешно выдержали 35, второе 48, третье 64, четвертое 63 человека, при этом все 4 задания не выполнил никто. Прошедших и третье, и четвертое испытания зачислили в институт. Сколько было зачисленных?

**Решение.** 1-е и 2-е задания решили минимум  $35+48-70=13$  человек. 3-е и 4-е - минимум  $64+63-70=57$  человек. Все задания не сделал никто, значит, 1-е и 2-е осилили 13 человек, 3-е и 4-е – 57 человек.

**Ответ:** 57 человек.

**Критерии.**

Баллы	Условия выставления
10 баллов	Обоснованное решение
5 баллов	При обоснованном решении допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0 баллов	Любая другая ситуация

2. (15 баллов) Пусть  $f(x) = x^2 - 5x + 2020$ . Решите уравнение  $f(3-x) = f(3x-1)$

**Решение:** Пусть уравнение имеет вид  $f(a) = f(b)$ , получаем что:

$$a^2 - 5a + 2020 = b^2 - 5b + 2020$$

$$a^2 - b^2 - 5a + 5b = 0$$

$$(a-b)(a+b-5) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно,  $a = b$  или  $a + b = 5$ .

$$\begin{cases} a = b \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 3x - 1 \\ 3 - x + 3x - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,5 \end{cases}$$

**Ответ:** {1,5 и 1}.

**Критерии.**

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

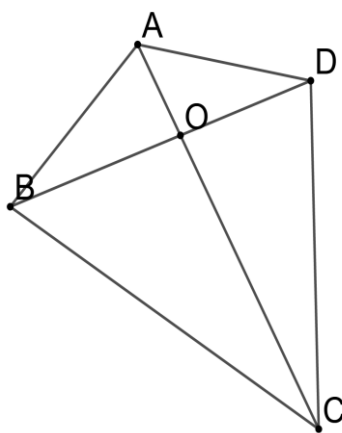
3. (15 баллов) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = 10$ ,  $CD = 15$ . Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AC = 20$ , треугольники  $AOD$  и  $BOC$  имеют равные площади. Найдите  $AO$ .

**Решение:**

Из равенства площадей треугольников  $AOD$  и  $BOC$  и равенства углов  $\angle AOD = \angle BOC$  следует  $\frac{AO \cdot OD}{BO \cdot OC} = 1$  (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу).

Откуда получаем, что  $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$ . При этом  $\angle AOB = \angle DOC$  как вертикальные. Следовательно

треугольники  $AOB$  и  $COD$  подобны.  $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$ , а значит  $AO = 8$ .



**Ответ:** 8.

**Критерии:**

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников $AOB$ и $COD$ , но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Правильно применена теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

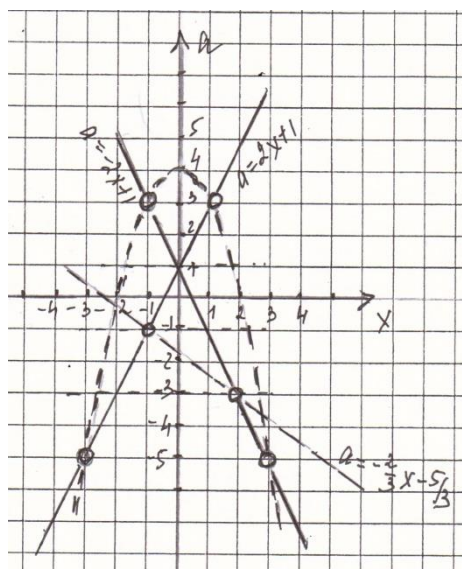
4. (20 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\left| \frac{-4x^4 - (6a+10)x^3 + (16-4a)x^2 - (6a^2-14a-40)x}{(4-x^2-a)(3a+2x+5)} \right| = \sqrt{a^2 - 2a + 1}$$
 имеет одно решение?

### Решение

Преобразуем

$$\left| \frac{-4x^4 - (6a+10)x^3 + (16-4a)x^2 - (6a^2-14a-40)x}{(4-x^2-a)(3a+2x+5)} \right| = \sqrt{a^2 - 2a + 1}$$



$$\left| \frac{2x(-2x^3 - (3a+5)x^2 + (8-2a)x - (3a^2-7a-20))}{12a-3ax^2-3a^2+8x-2x^3-2ax+20-5x^2-5a} \right| = \sqrt{(a-1)^2}$$

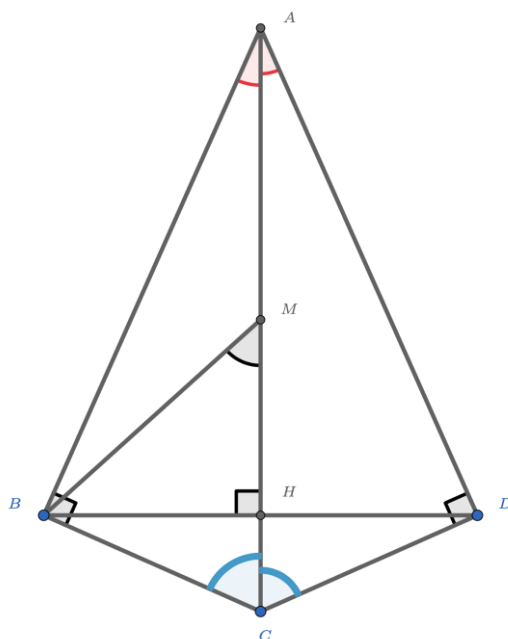
Решим графически уравнение  $|2x| = |a-1|$ ,  $a \neq 4-x^2$ ,  $a \neq -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ , в системе  $xOa$ .

То есть  $\begin{cases} a = 2x + 1 \\ a = -2x + 1 \end{cases}$ ,  $a \neq 4-x^2$ ,  $a \neq -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

**Ответ:** при  $a = -3$ ,  $a = -1$ ,  $a = 1$ .

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $\angle B = \angle D = 90^\circ$ , диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны, а диагональ  $AC$  является биссектрисой углов  $A$  и  $C$ . Найдите углы  $A$  и  $C$ , если  $AC=2BD$ . Ответ дайте в градусах.



**Решение.**

1. Пусть  $H$  – точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Рассмотрим треугольник  $BAD$ .  $AH$  – высота и биссектриса, следовательно, треугольник  $BAD$  равнобедренный. По признаку. Значит,  $BH=HD$ . По условию  $AC=2BD$ , тогда пусть  $BH = x$ , тогда  $AC = 4x$ .
2. Рассмотрим треугольник  $ABC$  – прямоугольный. Проведем медиану  $BM$  треугольника  $ABC$ . По свойству медианы  $BM = AM = MC = \frac{1}{2}AC = 2x$ .
3. Рассмотрим треугольник  $BMH$ .  $BH = \frac{1}{2}BM$ . Значит, по свойству катета прямоугольного треугольника  $\angle BMH = 30^\circ$ .
4. Треугольник  $BMC$  равнобедренный, значит,  $\angle MBC = \angle MCB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ . Так как  $AC$  – биссектриса угла  $BCD$ , то  $\angle ACD = \angle ACB = 75^\circ$ . Следовательно,  $\angle BCD = 150^\circ$ .
5. В треугольнике  $ABC$   $\angle BAC = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ .  $AC$  – биссектриса угла  $BAD$ , значит,  $\angle BAD = 30^\circ$ .

**Ответ:**  $\angle BCD = 150^\circ$ ;  $\angle BAD = 30^\circ$

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Решение верное, но недостаточно обосновано. Или решение верное, но ответ записан не в градусах (через обратные тригонометрические функции)
10 баллов	В решении использовано свойство медианы, свойство угла $30^\circ$ , но дальнейшее решение отсутствует или неверно. ИЛИ верно найден один из углов четырехугольника с использованием тригонометрии.
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

**6. (20 баллов)** Даны 10 натуральных чисел, сумма любых четырёх из них чётна. Может ли произведение всех десяти чисел оканчиваться на 1580? Ответ обоснуйте.

**Решение:**

Очевидно, что чётность всех чисел одинакова. В противном случае, если есть числа с разной чётностью, то чисел хотя бы одной из этих чётностей хотя бы 3 (по принципу Дирихле), в таком случае, мы можем взять эти 3 числа и 1 число другой четности, и сумма этих четырех чисел не будет чётной. Но если все они нечётные, то произведение нечётно, а если чётные, то делится на  $2^{10}$ . Однако число, которое кончается на 1580, делится на 4, но не делится на 8.

**Ответ:** нет

**Критерии:**

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и верное решение
15 баллов	Показано, что произведение должно делиться на $2^{10}$
10 баллов	Описано, что все числа имеют одинаковую чётность, но дальнейших продвижений нет
5 баллов	Описано, что все числа имеют одинаковую чётность, но дальнейших продвижений нет
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше или написан только ответ.

## Решение варианта № 5

**1. (10 баллов)** В одном из районов планеты изучалась сейсмическая активность. 80 процентов всех дней было тихо. Предсказания приборов обещали спокойную обстановку в 64 случаях из ста; причем в 70 процентах всех случаев, когда день был спокойным, прогнозы приборов сбылись. Сколько процентов среди дней с повышенной сейсмоактивностью составляют те, в которых прогнозы не совпали с реальностью?

**Решение.** Пусть всего наблюдаемых дней было  $x$ . Реально тихих дней было  $0,8x$ , сейсмически активных  $0,2x$ . Предсказания тихих дней совпали с действительно тихими днями:  $0,7 \cdot 0,8x = 0,56x$ . Тогда активных дней, которые не совпали с прогнозами, было

$$0,64x - 0,56x = 0,08x \text{ и } \frac{0,08x}{0,2x} \cdot 100\% = 40\%$$

**Ответ:** 40%

### Критерии

Баллы	Условия выставления
10 баллов	Полное обоснованное решение
5 баллов	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение
0 баллов	Неверные рассуждения или записан только ответ.

**2. (15 баллов)** Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} y^2 + xy = 15 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases}$$

**Решение:** Сложив уравнения, получим:  $(x + y)^2 = 25$  или  $x + y = \pm 5$ .

Следовательно, система уравнений распадается на две:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + x(5 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 - x \\ x^2 + x(-5 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 - x \\ -5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

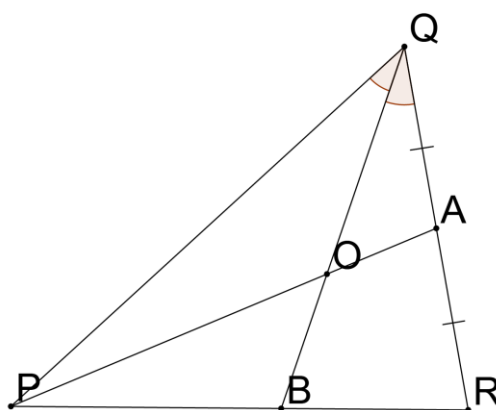
**Ответ:**  $(2; 3)$ ,  $(-2; -3)$ .

## Критерии

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. (15 баллов) В треугольнике  $PQR$  медиана  $PA$  и биссектриса  $QB$  ( $A$  и  $B$  – точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника) пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $3PQ = 5QR$ . Найдите отношение площади треугольника  $PQR$  к площади треугольника  $PQO$ .

**Решение:**



Из равенства  $3PQ = 5QR$  и того, что  $PA$  медиана следует, что  $PQ = 10x$ ,  $QA = AR = 3x$ , где  $x$  – коэффициент пропорциональности. По свойству биссектрисы  $\frac{PO}{OA} = \frac{PQ}{QA} = \frac{10}{3}$ . По теореме об

отношении площадей треугольников имеющих одинаковую высоту  $\frac{S_{PQO}}{S_{QOA}} = \frac{PO}{OA} = \frac{10}{3}$ . Учитывая,

что медиана  $PA$  делит площадь треугольника  $PQR$  на две равновеликие части, получаем

$$\frac{S_{PQR}}{S_{PQO}} = \frac{26}{10} = 2,6.$$

**Ответ:** 2,6.

## Критерии

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Правильно найдено отношение площадей треугольников $PQO$ и $QOA$ , но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Правильно найдено как точка $O$ делит отрезок $PA$ , но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. (20 баллов) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} = 0$  имеет три решения?

**Решение.**

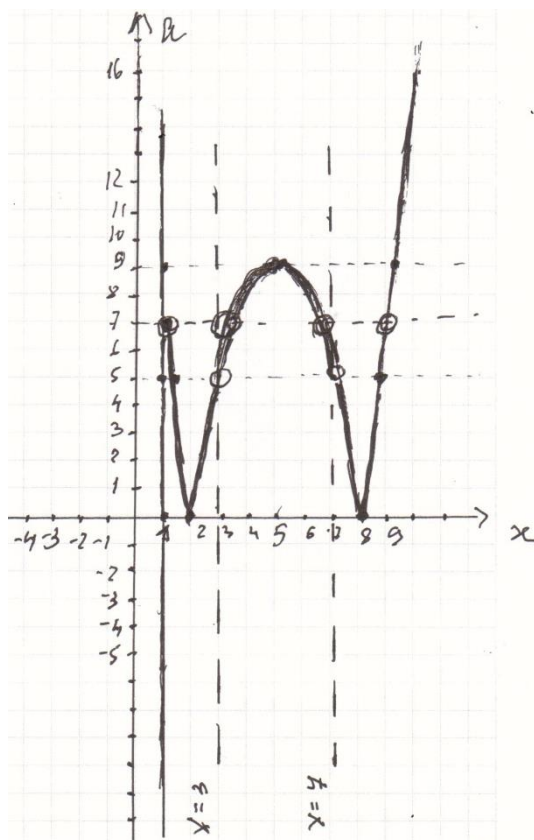
$$\begin{aligned} \text{Преобразуем } \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} &= \\ = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{x^2(a-7) - 10x(a-7) + 21(a-7)} &= \\ = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{(a-7)(x-7)(x-3)} & \end{aligned}$$

Решим графически уравнение

$$\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{(a-7)(x-7)(x-3)} = 0 \text{ в системе } xOa.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ a = |x^2 - 10x + 16| \\ x \geq 1 \\ x \neq 7, x \neq 3, a \neq 7 \end{cases}$$

**Ответ:** при  $a = 0$ ,  $a = 5$ ,  $a = 9$  уравнение имеет три корня.



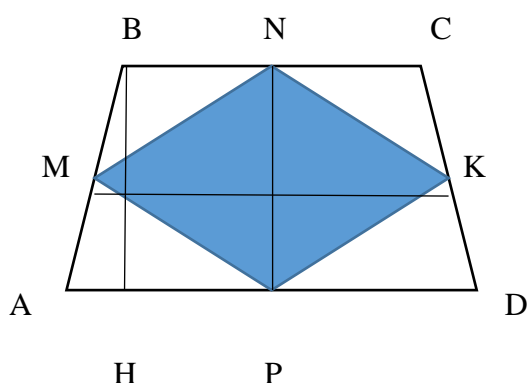


## Критерии

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов) Четырехугольник, соединяющий середины сторон трапеции ABCD, является ромбом. Найдите его площадь, если высота трапеции  $BH=5$  см, меньшее основание  $BC=6$  см, а угол ABC равен  $120^\circ$ .

**Решение.**



1. Так как  $MNKP$  – ромб, то  $MN=NK$ .
2.  $MN$ - средняя линия треугольника  $ABC$ , следовательно,  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2} AC$ .
3. Аналогично доказывается, что  $NK = \frac{1}{2} BD$ .
4. Так как  $MN=NK$ , то  $AC=BD$ , тогда трапеция  $ABCD$  – равнобедренная (по признаку равнобедренной трапеции).
5. Проведем  $MK$  и  $NP$  - диагонали ромба. По свойству диагоналей ромба  $MK \perp NP$ .  

$$S_{MNKP} = \frac{1}{2} NP \cdot MK.$$
6.  $MK$  – средняя линия трапеции  $ABCD$ , следовательно,  $MK \parallel AD$ .  $NP \perp MK$ ,  $MK \parallel AD$ , следовательно,  $NP \perp AD$ . Значит,  $NP$  – высота трапеции и  $NP = CH = 5$ .
7. 
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BH \cdot (DA + CB) = NP \cdot MK = 2S_{MNKP}.$$

8. Треугольник  $ABH$  прямоугольный.  $AH = \frac{BH}{\operatorname{tg} \angle BAD} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ . Тогда  $AD = 2AH + CB = \frac{10\sqrt{3}}{3} + 6 = \frac{10\sqrt{3}+18}{3}$
9.  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(6 + \frac{10\sqrt{3}+18}{3}\right) = \frac{180+50\sqrt{3}}{6}$ , тогда  $S_{MNKP} = \frac{90+25\sqrt{3}}{6}$ .

**Ответ:**  $\frac{90+25\sqrt{3}}{6}$ .

### Критерии

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Полное обоснованное решение.
15 баллов	Решение в целом верное, но недостаточно обоснованное (например, есть недочеты в доказательстве факта, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция) ИЛИ при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, записана формула площади ромба. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. (20 баллов) Средняя продолжительность жизни в стране Гондор составляет 64 года. А средняя продолжительность жизни в стране Нуменор составляет 92 года. Средняя продолжительность жизни в двух этих странах 85 лет. Во сколько раз отличается население Гондора от населения Нуменора?

### Решение:

Обозначим население Нуменора за  $n$ , а население Гондора за  $g$ , тогда:

$$64g + 92n = 85(g+n)$$

$$64g + 92n = 85g + 85n$$

$$7n = 21g$$

$$n = 3g$$

**Ответ:** население Гондора в 3 раза меньше

### Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и обоснованное решение.
10 баллов	Решение в целом верное, но допущена арифметическая ошибка
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев или указан только ответ