

Решение варианта № 1

1. Увидев лису в нескольких метрах от себя, собака погналась за ней по прямой просёлочной дороге. Прыжок собаки на 23% длиннее прыжка лисы. Существует промежуток времени, за который и лиса, и собака делают по целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что собака за это время успевает сделать на $t\%$ прыжков меньше, чем лиса, где t – целое число. Предполагая, что все прыжки и у собаки, и у лисы одинаковы, найдите, при каком минимальном значении t лиса сможет убежать от собаки?

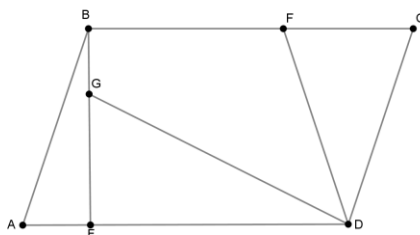
Решение: Пусть x – длина прыжка лисы, y – количество прыжков, которое она делает в некоторую единицу времени. Тогда xy – путь, пройденный лисой за это время. Путь, пройденный за то же

время собакой – $1,23x(1 - \frac{t}{100})y$. Лиса убежит от собаки, если $1,23x(1 - \frac{t}{100})y < xy$;

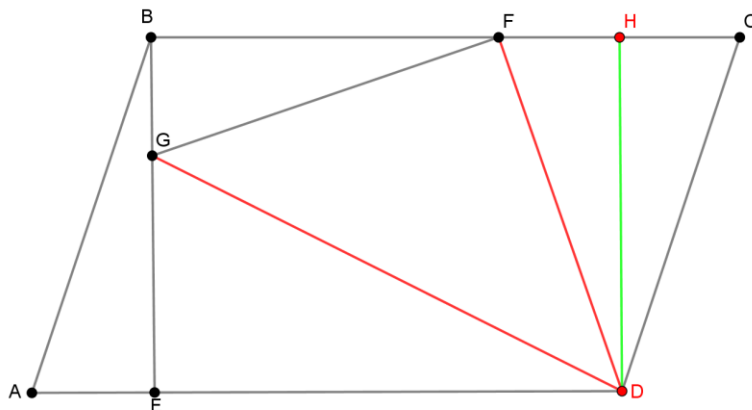
$$1,23(100 - t) < 100; 23 < 1,23t; t > \frac{23}{1,23}; t > 18\frac{86}{123}, \text{ при } t = 19\%.$$

Ответ: 19.

2. В параллелограмме ABCD высота BE=3, AE: ED=1:4. Сторона BC=5. На отрезках BE и BC отмечены точки G и F соответственно, так что BG: GE=1:2, BF: FC=3:2. Определите градусную меру угла FDG.



Решение. Построим высоту DH и соединим точки F и G.



1) $\triangle BFG = \triangle DFH$ - по двум катетам, так как $BF = DH = 3$; $BG = FH = 1$, поэтому $FG = FD$,
 $\angle BFG = \angle FDH = \alpha$ и $\angle DFH = \angle BGF = 90^\circ - \alpha$.

2) $\triangle DFG$ - прямоугольный равнобедренный, так как $FG = FD$, и
 $\angle BFG + \angle GFD + \angle DFH = 180^\circ$. $\angle GFD = 180^\circ - \angle BFG - \angle DFH$.
 $\angle GFD = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$. Значит $\angle FDG = 45^\circ$.

Ответ: $\angle FDG = 45^\circ$.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000} = 150$, $d = 0,5$.

Вычислить: $99 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \dots + \frac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right)$.

Решение: Выражение в скобке состоит из нескольких слагаемых вида $\frac{1}{x \cdot (x + d)}$, которые можно

разложить в сумму простейших дробей: $\frac{1}{x \cdot (x + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + d} \right)$. Преобразуем исходное

выражение: $99 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \dots + \frac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right) =$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581}} - \frac{1}{a_{1582}} + \dots + \frac{1}{a_{2019}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) =$$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \left(\frac{a_{2020} - a_{1580}}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \left(\frac{(2019 - 1579)d}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) =$$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \left(\frac{(2019 - 1579)d}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{440d}{660 \cdot 440} = 15,$$

так как $a_{2020} = a_{1000} + 1020d = 150 + 1020 \cdot 0,5 = 660$, а

$$a_{1580} = a_{1000} + 580d = 150 + 580 \cdot 0,5 = 440.$$

Ответ: 15.

4. В $\triangle ABC$ с $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 .

Найти $\angle C_1B_1A_1$.

Решение.

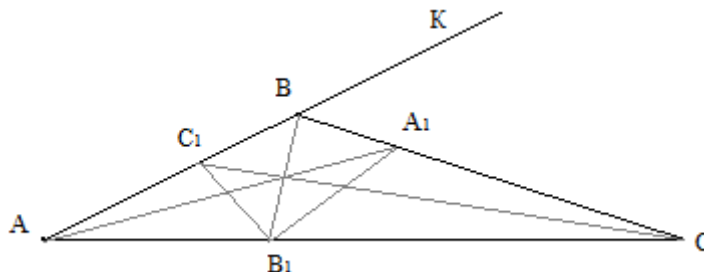
Продолжим сторону AB за точку B , тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK .

Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C , а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$.

Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.

Следовательно $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

Ответ: $\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ$



5. Скупщики расплачиваются с ловцами жемчуга золотом и кукурузой. Посоветовавшись, скупщики решили снизить цену «в золоте» на 5% на первом острове. Тогда «в кукурузе» цена упадет на 7%, так как цены золота и кукурузы связаны на рынке.

А для ловцов жемчуга второго острова из-за пришедшего холодного течения решили снизить цену меньше – «в золоте» на 1%. На сколько процентов упадет цена жемчуга «в кукурузе» для ловцов второго острова? Ответ округлите до сотых после запятой.

Решение. Пусть x - исходная цена жемчуга; для первого острова: $0,95x$ «в золоте»; $0,93x$ – в «кукурузе». Их отношение $\frac{95}{93}$ постоянно на рынке. Для второго острова: $0,99x$ в «золоте», y – в

«кукурузе»; $\frac{0,99x}{y} = \frac{95}{93}; y = \frac{0,99x \cdot 93}{95}$. Подешевел жемчуг на

$$\left(1 - \frac{0,99 \cdot 93}{95}\right)x = \frac{95 - 92,07}{95}x = \frac{2,93}{95}x. \text{ В процентах } \frac{2,93x \cdot 100\%}{95x} = \frac{293}{95} = 3,08$$

Ответ: 3,08.

6. Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x; y) = x^2 + 8y + y^2 + 14x - 6$, при условии, что $x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y)$.

Решение.

$x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y) \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$ – это окружность с центром $(5; 5)$ и радиусом 5. Пусть $F(x; y) = M$, тогда $(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = (M + 71)$ – это окружность с центром $(-7; -4)$ и радиусом $(M + 71)^{0,5}$.

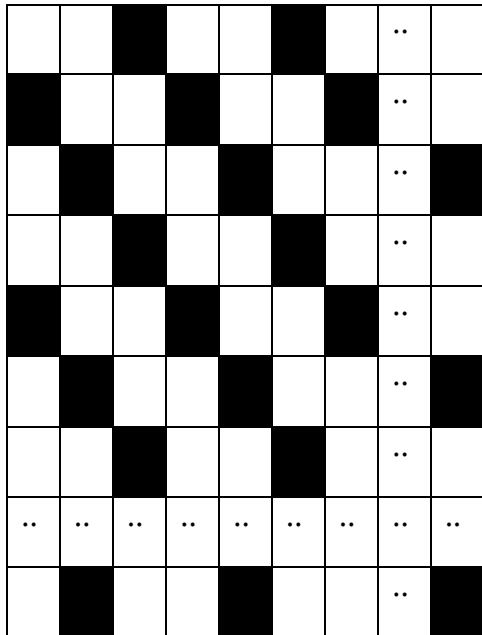
Так как центр второй окружности лежит вне первой, то условие минимума функции равносильно условию минимума M , при котором окружности пересекутся, а это точка касания двух окружности. То есть сумма радиусов двух окружностей должна равняться расстоянию между их центрами. $(10 + (M + 71)^{0,5})^2 = (5 + 7)^2 + (5 + 4)^2 \Rightarrow (M + 71)^{0,5} = 10 \Rightarrow M = 29$.

Ответ: 29.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35×35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис.). Таким образом, будет закрашено $\left\lceil \frac{N^2}{3} \right\rceil$ клеток. Это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3×3 нужно закрашивать не менее трех клеток. $\left\lceil \frac{35^2}{3} \right\rceil = 408$.



Ответ: 408.

8. Найдите сумму всех целых значений s , при которых уравнение $15|p-1| + |3p-|p+s|| = 4p$ относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(p) = 15|p-1| + |3p-|p+s|| - 4p$. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при p . $15 > 4 + 1 + 3$. Отсюда следует, что на всех интервалах до $p=1$ коэффициент линейного приращения отрицателен, а после $p=1$ – положителен. $p=1$ – точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(p)=0$ имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$f(1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{Возьмём } |s+1|=t; |3-t|-4 \leq 0$$

$$(3-t)^2 - 4^2 \geq 0$$

$$(7-t)(-1-t) \geq 0$$

$$t \in [-1; 7]$$

$$|s+1| \leq 7$$

Ответ: -15.

9. Известно, что число вхождений некоторого символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение:

Пусть длина текста равна L . Пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L , для которого существует такое натуральное число x , что $\frac{10,5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{11}{100}$. Чем меньше x , тем меньше соответствующее L (при малых x это действительно так). При $x=1$ не существует удовлетворяющего неравенству натурального L . При $x=2$ находим, решая неравенство, что $L=19$. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{11}$ заключаем, что $L > 19$ при $x \geq 3$.

Ответ: 19.

Решение варианта № 2

1. Две сестры собирали смородину: старшая – в четырёхлитровое ведро, а младшая – в ведёрко вместимостью 3,5 литра. Старшая всё время работала быстрее младшей. Когда старшая сестра собрала три четверти своего ведра, а младшая больше половины своего, девочки поменялись ведрами. Продолжая работать с такой же скоростью, как до обмена ведрами, они закончили работу одновременно. Во сколько раз старшая сестра собирала ягоды быстрее младшей?

Решение: $0,75 \cdot 4 = 3$ литра ягод собрала старшая сестра к моменту обмена ведрами. Пусть x литров набрала к этому моменту младшая сестра. Так как скорость работы сестёр одна и та же до и после

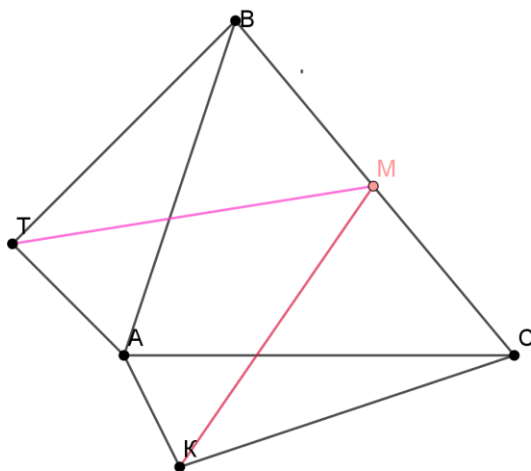
обмена ведрами, составим уравнение: $\frac{3}{x} = \frac{3,5 - x}{1}; 3 = x(3,5 - x)$. Корни уравнения

$$x_1 = 2; x_2 = 1,5.$$

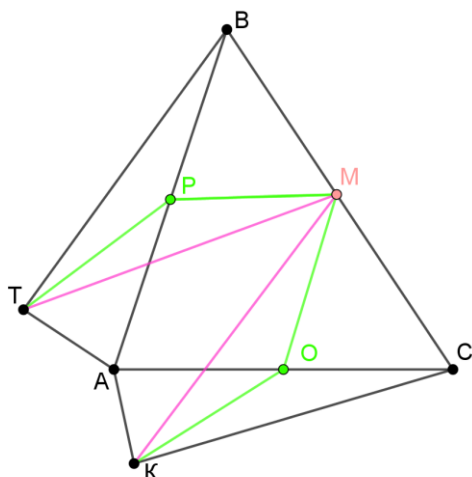
Второй корень не подходит по условию задачи, так как к моменту обмена младшая сестра набрала больше половины своего ведра. Подставляя $x = 2$ в пропорцию, получим, что старшая сестра работала в 1,5 раза быстрее младшей.

Ответ: 1,5.

2. На стороне АВ и АС треугольника ABC, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB = \angle AKC = 90^\circ$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^\circ$, на стороне BC выбрана точка М так, что $BM = MC$. Определите градусную меру угла KMT.



Решение. На серединах сторон АВ и АС отметим точки Р и О соответственно. Соединим Р с М и Т, а О с К и М.



1) $\triangle TPM = \triangle KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как $AO = b/2 = KO = PM$;

$AP = c/2 = TP = OM$; $\angle TPM = \angle TPA + \angle APM = \angle AOK + \angle AOM = \angle KOM$, значит $TM = MK$, и $\angle PMT = \angle MKO = \alpha$, $\angle PTM = \angle KMO = \beta$,

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$,

$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^\circ - \angle MOK$. В свою очередь
 $\angle MOK = 360^\circ - \angle KOC - \angle MOC = 360^\circ - 120^\circ - \angle BAC = 240^\circ - \angle BAC$.

3) $\angle KMT = \angle PMO - (\angle PMT + \angle KMO) = \angle BAC - (180^\circ - \angle MOK) \Rightarrow$
 $\angle KMT = \angle BAC - 180^\circ + 240^\circ - \angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: 60.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 3$.

Вычислить $A = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A .

Решение: Преобразуем выражение, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{\sqrt{a_{1580}} - \sqrt{a_{1579}}}{a_{1580} - a_{1579}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{1580}} - \sqrt{a_{1579}}}{d} = \\
&= \frac{\sqrt{a_{1580}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{\sqrt{a_1 + 1579d} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{\sqrt{1 + 1579 \cdot 3} - \sqrt{1}}{3} = \frac{\sqrt{4738} - 1}{3}
\end{aligned}$$

Оцениваем значение A : $22 < \frac{\sqrt{4738} - 1}{3} < 23$, в ответ записываем наименьшее целое число,

большее A .

Ответ: 23.

4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB:AD=1:2$. Точка M середина AB , точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 3:1 считая от точки A . Найти сумму $\angle CAD$ и $\angle AKM$.

Решение:

Достроим прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AEFD$ со стороной AD .

Пусть $L \in EF, EL:LF=1:3$,

$$\triangle MEL = \triangle AKM \Rightarrow \angle EML = \angle AKM$$

$$N \in FD, FN = NC, MR \parallel AD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle NMR = \angle CAD.$$

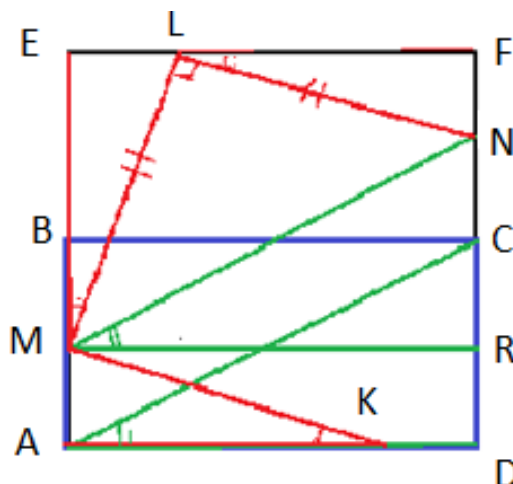
$$\triangle EML = \triangle LFN, ML = LN, \angle MLN = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle LMN = 45^\circ$$

$$\angle CAD + \angle AKM = \angle NMR + \angle EML =$$

$$= 90^\circ - \angle LMN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Ответ: 45.



5. Имеется два сплава свинца с оловом. В первом сплаве масса свинца относится к массе олова как 1:2; во втором - как 2:3. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы получить 22 г нового сплава с отношением масс свинца и олова 4:7?

Решение. Пусть в первом сплаве x г свинца и $2x$ г олова. Во втором сплаве $2y$ г свинца и $3y$ г олова.

Тогда $k \cdot 3x + n \cdot 5y = 22$; $\frac{kx + n \cdot 2y}{k \cdot 2x + n \cdot 3y} = \frac{4}{7}$; найти нужно $k \cdot 3x$ и $5ny$. Обозначим

$$ny = b; kx = a. \frac{a + 2b}{2a + 3b} = \frac{4}{7}; 7a + 14b = 8a + 12b; 2b = a. \text{Используем первое уравнение}$$

$$3a + 5b = 22; 11b = 22; b = 2; a = 4. \text{Значит, } k \cdot 3x = 12; 5ny = 10.$$

Ответ: 12.

6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1) + 1 = f(x) + \frac{43}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{101}{f(2020)}$, если $f(0) = 2020$.

Решение.

Заметим, что

$$f(x+2020) - f(x) = (f(x+2020) - f(x+2019)) + (f(x+2019) - f(x+2018)) + \dots + (f(x+1) - f(x)) = \frac{43}{(x+2020)(x+2021)} - 1 + \frac{43}{(x+2019)(x+2020)} - 1 + \dots + \frac{43}{(x+1)(x+2)} - 1. \quad \text{Таким образом,}$$

$$f(2020) - f(0) = 43 \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} + \dots + 1 - \frac{1}{2} \right) - 2020 = 43 \left(1 - \frac{1}{2021} \right) - 2020. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\frac{101}{f(2020)} = \frac{47}{20} = 2,35.$$

Ответ: 2,35.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35х35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

Решение.

Закрашивать надо в шахматном порядке. Таким образом, будет закрашено $\left\lceil \frac{N^2}{2} \right\rceil$ клеток. Так как любой «ход коня» приходится на клетку другого цвета, то на клетку такого же цвета хода нет. «Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу (большую 4х4) так, чтобы конь побывал на каждой ее клетке ровно один раз (см. табл. 5х5). Если пронумеровать эти ходы, то очевидно, что меньше $\left\lceil \frac{N^2}{2} \right\rceil$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35х35 нужно разбить на 49 таблиц 5х5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5х5.

$$\left\lceil \frac{35^2}{2} \right\rceil = 612.$$

21	16	5	10	23	
6	11	22	17	4	
1	20	15	24	9	26
12	7	18	3	14	
19	2	13	8	25	

Ответ: 612.

8. Найдите сумму всех целых значений h , при которых уравнение $||r+h|-2r|-3r=7|r-1|$ относительно r имеет не более одного корня.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(r) = 7|r-1| + 3r - ||r+h|-2r|$. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при r . $7 > 3+2+1$. Отсюда следует, что на всех интервалах до $r=1$ коэффициент линейного приращения отрицателен, а после $r=1$ – положителен. $R=1$ – точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r)=0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$f(1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Возьмём } |h+1|=t; 3-|t-2| \geq 0$$

$$(t-2)^2 - 3^2 \leq 0$$

$$(t-5)(t+1) \leq 0$$

$$t \in [-1; 5]$$

$$|h+1| \leq 5$$

Ответ: -11.

9. Таблица, состоящая из 2019 строк и 2019 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 2019 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 2019. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

Решение:

Покажем, что на диагонали присутствуют все числа от 1 до 2019. Пусть число $a \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ не стоит на диагонали. Тогда в силу симметрии таблицы, число a встречается чётное количество раз. С другой стороны, так как число a по одному разу встречается в каждой строке, всего в таблице чисел a нечётное количество (2019). Получили противоречие.

Всего на диагонали 2019 клеток, поэтому каждое число из множества $\{1, 2, \dots, 2019\}$ встретится на диагонали ровно по одному разу. Вычисляя сумму арифметической прогрессии, находим ответ.

Ответ: 2039190.