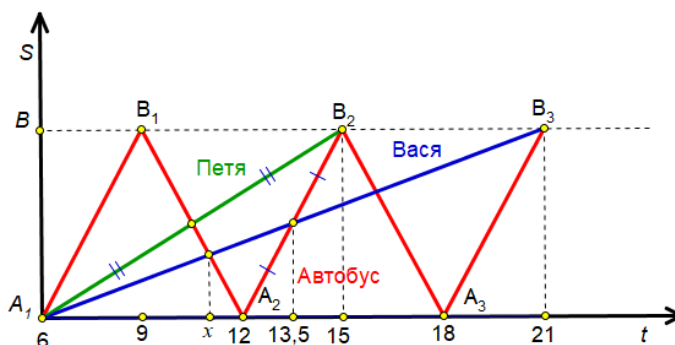


Решение варианта №1

1. Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами A и B , причем, доехав до пункта A или B он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта A в пункт B , двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта A в пункт B в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт B в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей. (12 баллов)

Решение. Решаем графическим методом. Изобразим все перемещения в координатах t (время) и S (расстояние). Траектория движения Пети из пункта A в пункт B – отрезок A_1B_2 . Траектория движения Васи из пункта A в пункт B – отрезок A_1B_3 .



Автобус с 6 до 15 часов три раза проехал расстояние AB . Расстояние AB автобус проезжает за 3 часа. Вася поравнялся с

автобусом посередине между пунктами A и B . Следовательно, на путь из A в B Вася потратил 15 часов, Петя – 9 часов. Отношение скоростей движения Васи и Пети равно 3:5. Определим, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей. Обозначим это время за x . Абсцисса точки пересечения медиан треугольника $A_1B_2A_2$ и равна x .

Следовательно, $\frac{x-6}{13,5-x} = \frac{2}{1}$, $x = 11$.

Ответ: 3:5, в 11 часов.

2. Найдите все целочисленные решения неравенства

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2 + z^2 - 38(xy + z) - 40(yz + x) + 4xyz + 761 \leq 0. \quad (12 \text{ баллов})$$

Решение:

$$(x^2y^2 + 2xyz + z^2) + (y^2z^2 + 2xyz + x^2) - 38(xy + z) - 40(yz + x) + 761 \leq 0.$$

$$(xy + z)^2 + (yz + x)^2 - 38(xy + z) - 40(yz + x) + 761 \leq 0,$$

$$(xy + z)^2 - 2 \cdot 19(xy + z) + 361 - 361 + (yz + x)^2 - 2 \cdot 20(yz + x) + 400 - 400 + 761 \leq 0,$$

$$(xy + z - 19)^2 + (yz + x - 20)^2 \leq 0, \begin{cases} xy + z = 19, \\ yz + x = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + z = 19, \\ y(z - x) - (z - x) = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + z = 19, \\ (z - x)(y - 1) = 1. \end{cases}$$

Поскольку нужно найти целочисленные решения неравенства, то возможны только два случая

$$1) \begin{cases} xy + z = 19, \\ z - x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x + 1 = 19, \\ z = x + 1, \\ y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 2, \\ z = 7. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy + z = 19, \\ z - x = -1, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 19, \\ z = x - 1, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 0, \\ z = 19. \end{cases}$$

Ответ: (6; 2; 7), (20; 0; 19).

3. Решите неравенство $\frac{4x^4+1}{4\sqrt{2}} \leq x\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}$. (16 баллов)

Решение. ОДЗ: $x^4 - \frac{1}{4} \geq 0$, $x \in (-\infty; -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}; +\infty)$

1) при $x \in (-\infty; -1/\sqrt{2}]$ неравенство решений не имеет;

2) при $x \in [1/\sqrt{2}; +\infty)$ возводим в квадрат обе части неравенства:

$$\frac{16x^8+8x^4+1}{32} \leq x^2 \left(x^4 - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow 16x^4 + 8 + \frac{1}{x^4} \leq 8 \left(4x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \Leftrightarrow \left(4x^2 - \frac{1}{x^2} \right)^2 + 16 \leq 8 \left(4x^2 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Сделаем замену $t = 4x^2 - \frac{1}{x^2}$. Приходим к неравенству $t^2 - 8t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow (t-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 4$.

После обратной замены имеем $4x^2 - \frac{1}{x^2} = 4$, $4x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

4. Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ делится нацело на 65. (20 баллов)

Решение. Докажем, что число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ при любых натуральных значениях n делится нацело на 5:

$$20^n - 15^n + 2^n - 7^n = 5^n(4^n - 3^n) + 2^n - (2+5)^n = 5^n(4^n - 3^n) + 2^n - 2^n - 5k = 5^n(4^n - 3^n) - 5k = 5N, \text{ где } N - \text{натуральное число.}$$

Докажем, что число $5^n(2^{2n}-3^n)+2^n-7^n$ при любых натуральных значениях n делится нацело на 13:

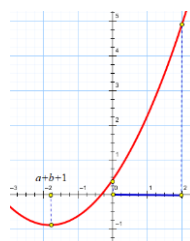
$$20^n - 15^n + 2^n - 7^n = (13+7)^n - (13+2)^n + 2^n - 7^n = 13k_1 + 7^n - 2^n - 13k_2 + 2^n - 7^n = 13(k_1 - k_2) = 13M, \text{ где } M - \text{натуральное число. Число делится нацело на 5 и на 13, следовательно, делится на 65.}$$

5. Найдите все значения параметра b , при котором для любого значения параметра $a \in [-1; 1]$ неравенство $x^2 + 6x + 2(a+b+1)\sqrt{-x^2 - 6x - 5} + 8 < a^2 + b^2 + 2a$ не выполняется хотя бы для одного значения $x \in [-5; -1]$. (20 баллов)

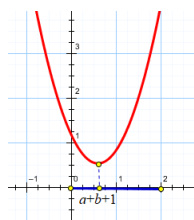
Решение: Сделаем замену $y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5} = \sqrt{4 - (x+3)^2}$, $y \in [0; 2]$. Получаем

$y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 + 2a - 3 > 0$. Выясним, при каких значениях a и b неравенство $y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 + 2a - 3 > 0$ выполняется для любого $y \in [0; 2]$. Рассмотрим функцию $f(y) = y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 + 2a - 3$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной в точке с абсциссой $y_0 = a+b+1$.

$$1) \begin{cases} a+b+1 \leq 0, \\ f(0) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \leq -1, \\ (a+1)^2 + b^2 > 4. \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 0 < a+b+1 < 2, \\ f(a+b+1) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < a+b < 1, \\ (a+1)b < -2. \end{cases}$$



$$3) \begin{cases} a+b+1 \geq 2, \\ f(2) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b \geq 1, \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 > 8. \end{cases}$$



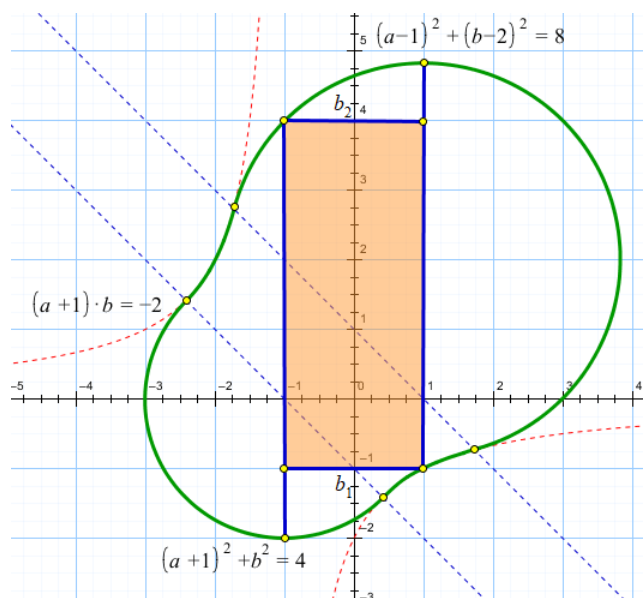
На координатной плоскости Oab изобразим множество точек $(a; b)$, удовлетворяющих условиям 1-3. Точки, не удовлетворяющие условиям 1-3, это точки, для которых неравенство $y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 + 2a - 3 > 0$ не выполняется хотя бы для одного $y \in [0; 2]$. Точки пересечения гиперболы $(a+1)b = -2$ и прямой $a+b = -1$ находим, решая уравнение $(a+1)^2 = 2$.

Получаем точки $(-1 \pm \sqrt{2}; \mp \sqrt{2})$. Окружность $(a+1)^2 + b^2 = 4$ пересекается с прямой $a+b = -1$ по тем же точкам (можно проверить подстановкой). Аналогичные рассуждения проводим для второй окружности и прямой. В итоге, точки, для которых неравенство $y^2 - 2(a+b+1)y + a^2 + b^2 - 3 > 0$ не выполняется хотя бы для одного $y \in [0; 2]$, образуют замкнутую область, граница которой состоит из графиков двух окружностей и гиперболы, граница включается. Для решения задачи необходимо найти такие значения b , при которых точки $(a; b)$ попадают в получившуюся область для любых $a \in [-1; 1]$.

Такие значения b образуют отрезок $[b_1; b_2]$. Нижнюю границу b_1 находим, подставляя в уравнение гиперболы $a = 1$. Имеем $b_1 = -1$. Верхнюю границу b_2 находим, подставляя в уравнение окружности $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 8$ значение $a = -1$. Имеем $b_2 = 4$.

Имеем $b_1 = -1$. Верхнюю границу b_2 находим, подставляя в уравнение окружности $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 8$ значение $a = -1$. Имеем $b_2 = 4$.

Ответ: $[-1; 4]$.



6. Первая окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC . Точки A и B лежат на второй окружности с центром в той же точке O . Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq A$), а прямая BC пересекает вторую окружность в точке E ($B \neq E$). Известно, что угол ABC равен углу CAE . Найдите косинус угла BAC . (20 баллов)

Решение. Точки D и E лежат вне отрезков AC и BC соответственно (рис. 1). В противном случае (рис.2) дуга DE является частью дуги AE (и не совпадает с ней), что противоречит условию равенства углов ABC и CAE .

Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle CAE = \beta$, $\angle CAE = \angle CBD = \beta$. Точка O – центр вписанной в треугольник ABD окружности. $\angle ABO = \beta/2$. Поскольку O – центр описанной в около треугольника ABC окружности, то треугольник AOB равнобедренный, и $\angle BAO = \angle ABO = \beta/2$. AO – биссектриса угла A , следовательно, $\angle OAC = \beta/2$. Треугольники AOD и BOD равнобедренные, и $\angle BDO = 3\beta/2$, $\angle ADO = \beta/2$. Поскольку $\angle A + \angle B + \angle D = 180^\circ$, то $3\beta + 3\beta/2 + \beta/2 = 180^\circ$, и $\beta = 36^\circ$. Треугольник ABD равнобедренный, $\angle B = \angle D = 72^\circ$, $\angle A = 36^\circ$.

Пусть $AC = x$, $CD = y$. Треугольники ABD и CBD подобны, $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$, $x^2 - xy - y^2 = 0$,

$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Поскольку $\cos(\angle BAC) = \cos \beta$, то по теореме косинусов для треугольника CBD имеем

$$\cos \beta = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot (3 - \sqrt{5}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

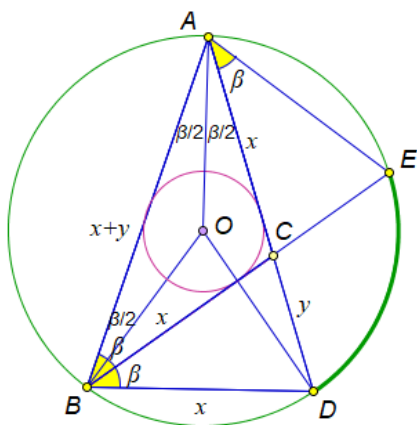


Рис. 1

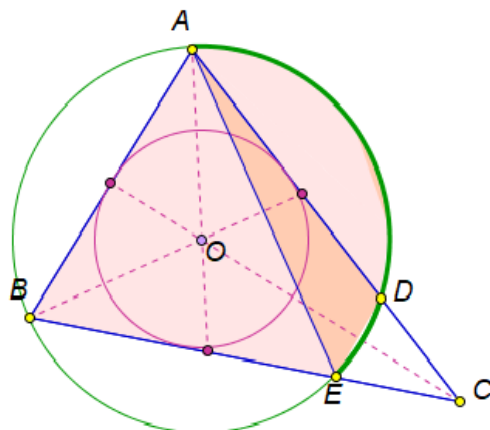


Рис. 2

Решение варианта 5

1. Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили $\frac{1}{4}$ содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как 9/16. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки. (12 баллов)

Решение. Первоначальное количество вещества – V . После того, как a часть вылили, концентрация вещества в пробирке стала $\frac{V-a}{V}$, после второго раза концентрация – $\left(\frac{V-a}{V}\right)^2$, после четвертого – $\left(\frac{V-a}{V}\right)^4$. Подставив данные задачи, получим отношение $\left(\frac{200-50}{200}\right)^4 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = \frac{9}{16}$, или $\left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{200-x}{200}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{200-x}{200} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 50$

Ответ: 50 мл.

2. Найдите остаток от деления на 11 числа A :

$$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 - \dots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \dots - 2^{-9} + 2^{-10}} \quad (12 \text{ баллов})$$

Решение.

$$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 - \dots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \dots - 2^{-9} + 2^{-10}} = \frac{2^{11}(2^{-10} - 2^{-9} + 2^{-8} - \dots + 2^{-2} - 2^{-1})}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \dots - 2^{-9} + 2^{-10}} = 2^{11}.$$

По теореме Ферма $a^p \equiv a \pmod{p}$, если p – простое число. Следовательно, $2^{11} \equiv 2 \pmod{11}$, т.е. остаток от деления на 11 числа A равен 2.

Ответ: 2.

3. Решите неравенство

$$\frac{(|x+1| - |x-1|)(x^3 - 7x^2 + 36)}{x^8 + 2x^6 - 6x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0 \quad (16 \text{ баллов})$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в знаменателе:

$$x^8 + 2x^6 - 6x^4 + 2x^2 + 1 = x^8 - 2x^4 + 1 + 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 = (x^4 - 1)^2 + 2x^2(x^2 - 1)^2 \geq 0, \quad \text{найдем нули числителя и домножим дробь на положительную величину, - получим}$$

$$\frac{(|x+1|^2 - |x-1|^2)(x+2)(x-3)(x-6)}{((x^2+1)^2 + 2x^2)(x^2-1)^2(|x+1|+|x-1|)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(4x)(x+2)(x-3)(x-6)}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0; 1) \cup (1; 3] \cup [6; +\infty)$.

4. Решите уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{71}{16}} - \sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{87}{16}} = \frac{1}{2}$. (20 баллов)

Решение. Учтем, что x неотрицателен, и сделаем замену переменных

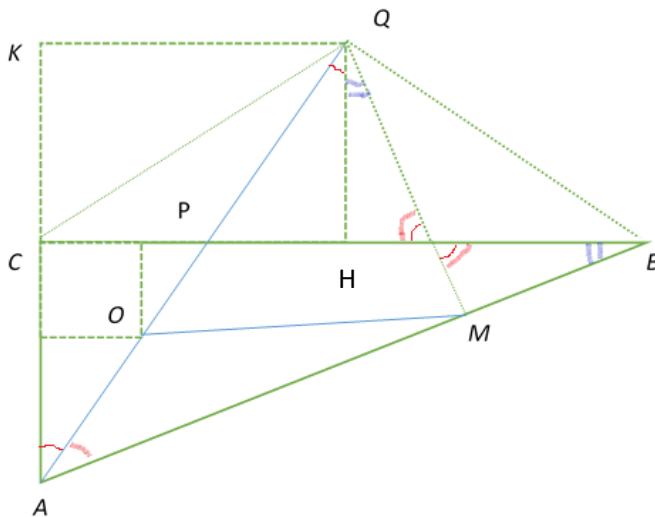
$$u = \sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{71}{16}}, \quad v = \sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{87}{16}}, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Тогда получим систему
$$\begin{cases} u - v = 1/2, \\ u^2 - v^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 1/2, \\ u + v = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5/4, \\ v = 3/4, \end{cases} \Rightarrow \text{обратная замена:}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{x} - \frac{71}{16} = \frac{25}{16}, \\ x + \sqrt{x} - \frac{87}{16} = \frac{9}{16}. \end{cases} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C длина биссектрисы угла A равна 4, угол $A = 60^\circ$. На серединном перпендикуляре к катету CB в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника OQK , где точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. (20 баллов)



Решение. Точка Q может лежать только за пределами треугольника, т.к. биссектриса AP делит стороны треугольника на пропорциональные сторонам отрезки, а гипотенуза больше катета. $QM = KQ$ как радиусы. $CQ = QB$, т.к. точка Q лежит на серединном перпендикуляре к катету CB . $\triangle OKQ = \triangle OMQ$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны и их площади. $S_{OKQ} = 1/2 \cdot KQ \cdot (r + QH)$, r – радиус вписанной окружности $\triangle ABC$,

$$AP = 4 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}, \quad AB = 4\sqrt{3}, \quad CB = 6 \Rightarrow KQ = 3; \quad CP = 2 \Rightarrow PH = 1, \quad QH = \sqrt{3},$$

$$S_{OKQ} = 1/2 \cdot 3 \cdot (r + \sqrt{3}), \quad r = (2\sqrt{3} - r) \operatorname{tg} 30 = (2\sqrt{3} - r) / \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3},$$

$$S_{OKQ} = 1/2 \cdot 3 \cdot (r + \sqrt{3}) = 9/2.$$

Ответ: 4,5

6. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$ имеет ровно одно решение. Укажите решение при найденных значениях параметра a . (20 баллов)

Решение.

Преобразуем уравнение $(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$ к виду $a^2 - a(2x^2 + 3) + x^4 + 2x^2 + x + 2 = 0$.

Это квадратное уравнение относительно параметра a . Найдем его дискриминант

$$D = (2x^2 + 3)^2 - 4(x^4 + 2x^2 + x + 2) = (2x - 1)^2 \Rightarrow a = \begin{cases} x^2 + x + 1, \\ x^2 - x + 2. \end{cases}$$

Решим два новых полученных квадратных уравнения относительно переменной x :

$$x^2 + x + 1 - a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2},$$

$$x^2 - x + 2 - a = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 7}}{2}.$$

Отметим, что уравнения имеют совпадающие решения при $a = \frac{7}{4}$.

Максимально возможное значение параметра, при котором уравнение имеет 2 корня $a = 7/4$, при этом первый корень $x_1 = -3/2$, а остальные корни совпадают $x_2 = x_3 = x_4 = 1/2$.

Единственное решение $x_1 = -1/2$ получается при $a = 3/4$.

Ответ: $a = 0,75$, $x_1 = -0,5$.