

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2018 г.

9 класс

№1: Найдите все такие натуральные числа, корень пятой степени из которых равен количеству сотен тысяч в этих числах.

№2: При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)(x^2-4x+4)+2a\sqrt{x^2-4x+4}+3a-2=0$$
 имеет хотя бы одно решение? В ответе

укажите длину получившегося промежутка, взятую со знаком «+», если ответ – отрезок или интервал и взятую со знаком «-», если ответ – полуинтервал (один конец промежутка входит в ответ, другой – нет).

№3: Найдите квадрат расстояния между максимально удаленными друг от друга точками фигуры, заданной уравнением на плоскости xOy :

$$|x-2y|+|(x+2)(x-3)|+(x+2)(x-3)=0$$

№4: В озеро Омега впадают две реки: Альфа и Бета. Пароход отплывает от пристани А на реке Альфа, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро и по реке Бета вверх до пристани В. Затем пароход возвращается обратно. На весь путь от А до В пароход затратил 1 час 48 минут, а на обратный путь 1 час 44 минуты. Скорость парохода при движении по озеру (без течения) 20 км/ч, скорость течения реки Альфа 5 км/ч, реки Бета – 4 км/ч, а длина пути от пункта А до пункта В по воде равна 34 км. На каком расстоянии (в километрах) от озера находится пристань В?

№5: Ваня играет с папой в игру «Забери последний камень». Сначала в куче 16 камней. Игроки по очереди берут 1, 2, 3 или 4 камня. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Ваня играет впервые и потому каждый раз берет случайное число камней, при этом он не нарушает правила игры. Папа играет по следующему правилу: на каждом ходу он берет столько камней, чтобы вероятность выигрыша Вани была наименьшей. Игру всегда начинает Ваня. Определить число $16 \cdot p$, где p - вероятность выигрыша Вани.

№6: Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором $AC = 2$. На боковой стороне BC отмечена точка M так, что $\angle MAC = 40^\circ$. Точка N лежит на продолжении прямой BC за точку C (C лежит между M и N) так, что $AN = MN$ и $\angle BAM = \angle NAC$.
Найти расстояние от точки C до прямой AN .

№7: Один из углов треугольника равен 48° . Высота, проведённая к стороне, прилежащей к этому углу равна половине стороны противолежащей к этому углу. Найдите разность между наибольшим и наименьшим углами треугольника.

№8: Решите уравнение. В ответе укажите сумму его корней.
$$(x^2 - 4)(x + 3) - 10(3x - 4)\sqrt{x + 3} + 3x(x + 3) = 10x^2\sqrt{x + 3} - 21(x^2 + 3x) + 84.$$

№9: Угол, образованный высотой BP равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и боковой стороной, равен 54° . Биссектрисы, проведённые к боковым сторонам равны 4. Найдите длину наименьшей биссектрисы.