Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

9 класс

Вариант – 1

1. *(12 баллов)* В классе меньше **30** человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

2. *(12 баллов)* Площадь ромба равна 8 кв. см. Каждую его сторону продлили на четверть своей длины в обе стороны. Концы всех этих отрезков соединили. Найдите площадь полученной фигуры.

3. *(16 баллов)* Катя хочет купить корм для кошек. В прошлый раз вся покупка обошлась ей в 48 рублей. В магазине выяснилось, что стоимость одной упаковки выросла на столько рублей, на сколько число 5,5 больше числа купленных упаковок товара. Известно, что за всю покупку Катя заплатила наибольшую из возможных сумму денег. Определите эту сумму. Сколько упаковок корма было куплено? Определите стоимость одной упаковки.

4. *(20 баллов)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7 \\ y = |x - a| - 2 \end{cases}$ имеет четыре различных решения.

Найдите эти решения при каждом значении a.

5. *(20 баллов)* В остроугольном треугольнике *ABC* на медиане *AM* выбирается точка *K* так, что *AK* = *CM*. Через точку *K* и вершину *B* проводится прямая, которая пересекает сторону *AC* в точке *E*. Величина угла *BEC* в два раза больше величины угла *CAM*. Найдите величину угла *AMB* в градусах.

6. *(20 баллов)* Решите неравенство:

$$\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right| \mathrm{i} \left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|.$$

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

9 класс

Вариант – 3

1. *(15 баллов)* Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)\left(x^2-2x+2+|x-2|\right)\leq\sqrt{15+2x-x^2}.$$

2. *(15 баллов)* В трапеции *ABCD* точки *K,N* принадлежат отрезку *BC*, *BK=KN=NC*=1, а точки *P,Q* принадлежат отрезку *AD, AP=PQ=QD=2*. Прямые *BC* и *AD* параллельны. Точка *K* соединена с точками *A,P,Q,D*. Точка Р соединена с точками *B,K,N,C*. Докажите, что точки пересечения прямых *BP* и *AK*, *KQ* и *PN*, *KD* и *PC* лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.

3. *(15 баллов)* Степан решил выставить на аукцион 44 страуса редкой породы, стартовая стоимость каждой особи равнялась 2,5 тыс. рублей. После продажи выяснилось, что средняя цена каждой птицы выросла на столько тысяч рублей, сколько страусов не продал Степан. Какую наибольшую сумму денег мог получить Степан? Какое количество птиц при этом он мог продать?

4. *(15 баллов)* Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}(x-3)^2+(a-2)^2\leq 9\\ 4a-3x\leq 8\\ 2a\leq 13-3x\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения a.

5. *(20 баллов)* В прямоугольной трапеции *ABCD* (*AD*||*BC*) угол *A* равен 60^0. На стороне *CD* выбирается точка *К* так, что *BK=2BC*, при этом *AD=CD*. Биссектриса $\angle BDC$ пересекает сторону *BC* в точке *N*, а *AK* и *DN* пересекаются в точке *P*. Найдите величину угла *DPB* в градусах.

6. *(20 баллов)* Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 15.00 до 16.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 16.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

9 класс

Вариант – 5

1. *(15 баллов)* Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

2. *(15 баллов)* Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}$. В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

3. *(15 баллов)* Решите неравенство:

$$\frac{2|2x-1|+2}{3}+\frac{6}{1+|2x-1|}\ \mathrm{J}\ 4-\sqrt{16x^4-8x^2+1}$$

4. *(15 баллов)* Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(x^2+(2a-1)x-4a-2)\cdot(x^2+x+a)=0$ имеет три различных корня.

5. *(20 баллов)* В остроугольном треугольнике *ABC* на стороне *BC* выбирается точка *D* так, что *CD:DB* =2:1, а на отрезке *AD* – точка *K*, при этом *AK* = *CD*+*DK*. Через точку *K* и вершину В проводится прямая, которая пересекает сторону *AC* в точке *E*. Треугольник *AEK* – равнобедренный (*AE*=*EK*). Найдите величину угла *ADC* в градусах.

6. *(20 баллов)* Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.