«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

А.А. Александров

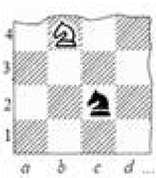
«___» ______________ 2019 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания для 10 класса

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 16×16 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)



2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

4. Решите неравенство $\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\le 0.$ (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3(x-a)^2+y=2-a,$ $y^2+\left(\dfrac{x-2}{|x|-2}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (20 баллов)

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\dfrac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\dfrac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\dfrac{1}{9}$, $CM=\dfrac{1}{6}$. (20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

10 класс

Вариант № 10-1

1. Даны две группы числовых последовательностей, каждая из которых состоит из 15 арифметических прогрессий, содержащих по 10 членов. Первые члены прогрессий первой группы равны 1, 2, 3, …, 15, а их разности равны соответственно 2, 4, 6, …, 30. Вторая группа прогрессий имеет те же первые члены 1, 2, 3, …, 15, но разности равны соответственно 1, 3, 5, …, 29. Найдите отношение суммы всех элементов первой группы к сумме всех элементов второй группы.

(12 баллов)

2. Две телефонные компании договорились выпустить комплекты всевозможных трехзначных телефонных номеров так, чтобы у первой компании все номера состояли из нечетных цифр, а у второй только из четных, за исключением 0. Первая компания распродала весь первый комплект по *X* рублей за номер, вторая - весь свой комплект по *Y* рублей за номер, разность выручки первой компании и выручки второй составила 5 рублей. Укажите все возможные значения пар (*X, Y*), если считать, что *X* и *Y* целые числа, меньшие 250. (12 баллов)

3. Решите уравнение

$$3\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x^2-4x+4}=|1+6x|-4|x-1|.$$ (16 баллов)

4. Решите неравенство

$$4+x^2+2x\sqrt{2-x^2}<8\sqrt{2-x^2}+5x.$$ (20 баллов)

5. Укажите, при каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{2-2a(x+1)}{|x|-x}=\sqrt{1-a-ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Найдите решения этого уравнения при всех найденных значениях параметра *a*. (20 баллов)

6. Окружность радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ABC,* если величина угла *ACB* равна $120°$. (20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

10 класс

Вариант № 10-7

1. Телефонная компания решила упорядочить процедуру выдачи телефонных номеров в новом микрорайоне следующим образом: жителям квартир с четными номерами выдавать семизначные номера, состоящие только из четных цифр, а жителям квартир с нечетными номерами – семизначные номера, состоящие только из нечетных цифр. Сколько всего существует возможностей составить семизначные номера: а) только с четными цифрами, не начинающиеся с 0, б) только с нечетными цифрами, в) каких номеров окажется больше и во сколько раз? (12 баллов)

2. Найдите все значения $n,\ n \in N,$ при которых сумма первых членов последовательности $a_k = 3k^2 - 3k + 1,\quad k \in N,$ равна сумме первых n членов последовательности $b_k = 2k + 89,\quad k \in N$. (12 баллов)

3. Решите уравнение

$$3\sqrt{6x^2 + 13x + 5} - 6\sqrt{2x + 1} - \sqrt{3x + 5} + 2 = 0$$

(16 баллов)

4. Решите неравенство

$$\frac{x(x-2)(x-3) - (x-2)^2 + 1}{(|x-1| - |x-2|)\sqrt{16 - x^2}} \geq 0$$

(20 баллов)

5. Определите все значения параметра *p,* при которых система

$$\begin{cases} (x-p)^2 = 16(y - 3 + p), \\ y^2 + \left(\dfrac{x-3}{|x|-3}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решения и решите ее при каждом из найденных значений *p*. (20 баллов)

6. Окружность с центром O_1 радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь четырехугольника O_1DO_2E, если величина угла *ACB* равна $120°$. (20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2019 г.

10 класс

Вариант № 10-9

1. Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^3+y^3+z^3=-10. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2}-\sqrt[4]{9-y^2}-\sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2}\geq 2.$ (12 баллов)

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 21, зеленый – 45, голубой – 75, синий – 87, фиолетовый – 91, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 19$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $n+4$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 20$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (16 баллов)

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1) a^2+6a+8 делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-15b-9=0$;

3) $a+2b+2$ делится на 4; 4) $a+6b+2$ - простое число

три истинны, а одно ложно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2;\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. В треугольнике ABC с углом A, равным $60°$, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка OM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1,5$.

(20 баллов)