Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2018 г.

9 класс

№1: Найдите все такие натуральные числа, корень пятой степени из которых равен количеству сотен тысяч в этих числах.

Решение. Пусть x-искомое число, $\sqrt[5]{x}=z, \sqrt[5]{x}=\frac{x}{100000}-a, a\in[0;1)$

$z=\frac{z^5}{10^5}-a, z^5=10^5\cdot z+a\cdot10^5$, или $z^4=10^5+\frac{a\cdot10^5}{z}$. Из этого равенства следуют две оценки:

первая: $z^4\geq10^5.20^4=160000\succ10^5,19^4=130621\succ10^5,18^4=104976\succ10^5,17^4=83521\prec10^5$

$\Rightarrow z\geq18$

Вторая: $z^4\prec10^5+\frac{1\cdot10^5}{18}=10^5\cdot\frac{19}{18}=105555,55556$

$18^4\prec\frac{19}{18}\cdot10^5$. Только z=18 удовлетворяет 1) и 2), значит $x=z^5=18^5=1889568$

Ответ: 1889568.

№2: При каких значениях параметра a уравнение

$(a-1)\left(x^2-4x+4\right)+2a\sqrt{x^2-4x+4}+3a-2=0$ имеет хотя бы одно решение? В ответе укажите длину получившегося промежутка, взятую со знаком «+», если ответ – отрезок или интервал и взятую со знаком «-», если ответ – полуинтервал (один конец промежутка входит в ответ, другой – нет).

Решение. Обозначим $t=\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|\geq0$.

Уравнение примет вид: $(a-1)t^2+2at+3a-2=0$. Проще сначала решить обратную задачу – определить, при каких значениях a решений нет, а затем вычесть из множества действительных чисел эти промежутки. Уравнение не имеет корней, если $D<0$ или все корни отрицательны. Отдельно необходимо рассмотреть линейный случай $a=1$.

При $a=1$ уравнение принимает вид $2t+1=0\,; t=-0{,}5<0$. Значит, корней этому значению параметра не соответствует.

$\frac{D}{4} = a^2 - (a-1)(3a-2) < 0$ при $a \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$. Оба корня отрицательны, если их сумма отрицательна, а произведение положительно. На основании теоремы Виета два или один отрицательный корень задаются системой условий $\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-2a}{a-1} < 0 \\ \frac{3a-2}{a-1} > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} a \in [0{,}5; 2] \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases}$; $a \in (1; 2]$.

Объединяя все значения параметра, при которых нет решений, получим

$$a \in (-\infty; 0{,}5) \cup [1; +\infty)$$

Значит, хотя бы одно решение существует при $a \in [0{,}5; 1)$.

Ответ: - 0,5 .

№3: Найдите квадрат расстояния между максимально удаленными друг от друга точками фигуры, заданной уравнением на плоскости xOy:

$$|x-2y| + |(x+2)(x-3)| + (x+2)(x-3) = 0$$

Решение:

$|x-2y| \geq 0 \forall x, \forall y; |(x+2)(x-3)| \geq 0 \forall x \Rightarrow (x+2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow |(x+2)(x-3)| = -(x+2)(x-3) \Rightarrow$

$|x-2y| = 0;$ при одновременном выполнении полученных условий получается отрезок AB,

где A(-2;-1), B(1;2).Длина отрезка AB=$\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: 31,25.

№4: В озеро Омега впадают две реки: Альфа и Бета. Пароход отплывает от пристани A на реке Альфа, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро и по реке Бета вверх до пристани B. Затем пароход возвращается обратно. На весь путь от A до B пароход затратил 1 час 48 минут, а на обратный путь 1 час 44 минуты. Скорость парохода при движении по озеру (без течения) 20 км/ч, скорость течения реки Альфа 5 км/ч, реки Бета – 4 км/ч, а длина пути от пункта A до пункта B по воде равна 34 км. На каком расстоянии (в километрах) от озера находится пристань B?

Решение. Обозначим x, y, z – расстояния, которые пароход прошёл по реке Альфа, озеру и реке Бета соответственно. Тогда по условию задачи составим систему $\begin{cases} \frac{x}{25}+\frac{y}{20}+\frac{z}{16}=\frac{9}{5} \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{20}+\frac{z}{24}=\frac{26}{15} \\ x+y+z=34 \end{cases}$;

$$\begin{cases} y=34-x-z \\ \frac{4}{5}x+34-x-z+\frac{5}{4}z=36 \\ \frac{4}{3}x+34-x-z+\frac{5}{6}z=\frac{104}{3} \end{cases}$$

Систему можно решать по-разному. Например, умножим первые два уравнения на 20 и применим метод последовательного исключения неизвестных. $\begin{cases} y=34-x-z \\ 2x-z=4 \\ 5z-4x=40 \end{cases}$; $\begin{cases} x=10 \\ y=8 \\ z=16 \end{cases}$.

Ответ: 16.

№5: Ваня играет с папой в игру «Забери последний камень». Сначала в куче 16 камней. Игроки по очереди берут 1, 2, 3 или 4 камня. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Ваня играет впервые и потому каждый раз берет случайное число камней, при этом он не нарушает правила игры. Папа играет по следующему правилу: на каждом ходу он берет столько камней, чтобы вероятность выигрыша Вани была наименьшей. Игру всегда начинает Ваня. Определить число $16 \cdot p$, где p - вероятность выигрыша Вани.

Решение: Заметим, что игрок, делающий первый ход, всегда имеет преимущество и выигрывает при правильной стратегии. Действительно, на первом шаге нужно взять один камень из кучи, а на каждом последующем шаге брать такое количество камней, чтобы число оставшихся камней делилось на 5. Поскольку согласно правилам игры, на каждом шаге разрешено брать 1, 2, 3 или 4 камня, такая стратегия всегда осуществима.

В то же время, если на каком-то из шагов игрок, делающий первый ход, отступит от этой стратегии, то его соперник имеет возможность выиграть игру, воспользовавшись той же стратегией. Заметим также, что если в игре побеждает игрок, делающий первый ход, то он обязательно делает за игру 4 хода.

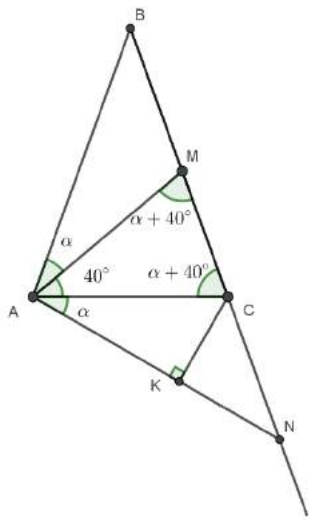
Таким образом, у Вани на каждом ходу есть только одна возможность выиграть: если он возьмет 1 камень на первом ходу, оставит папе ровно 10 камней после второго хода и ровно 5 камней после третьего хода. Вероятность этого $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

После этого папа, чтобы сделать наименьшей вероятность выигрыша Вани, должен взять 1 камень. Тогда Ваня выиграет, только если сразу возьмет 4 камня из четырех оставшихся. Вероятность такого хода $\frac{1}{4}$.

Таким образом, вероятность выигрыша Вани равна $p=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$, ответом является число $16\cdot p=\frac{1}{16}=0,0625$.

Ответ: 0,0625.

№6: Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC $(AB=BC)$, в котором $AC=2$. На боковой стороне BC отмечена точка M так, что $\angle MAC=40^\circ$. Точка N лежит на продолжении прямой BC за точку C (C лежит между M и N) так, что $AN=MN$ и $\angle BAM=\angle NAC$.



Найти расстояние от точки C до прямой AN.

Решение.

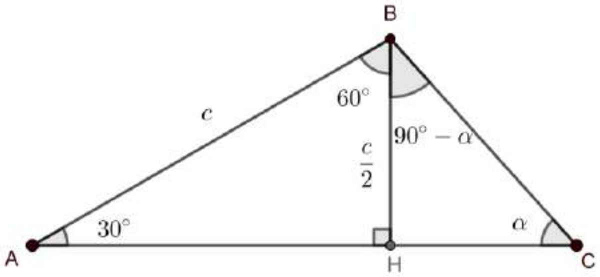
Рассмотрим $CK\perp AN,$ CK - расстояние от точки C до прямой AN. По условию: $\angle BAM=\angle NAC=\alpha$, $\angle MAC=40^\circ$. Так как $AN=MN$, то $\angle AMN=\angle MAN=\alpha+40^\circ$, далее, из $AB=BC$, получаем $\angle MCA=\alpha+40^\circ$. В треугольнике MAC: $2\cdot\left(\alpha+40^\circ\right)+40^\circ=180^\circ$, следовательно, $\alpha=30^\circ$. В треугольнике ACK : $\angle K=90^\circ,$ $\angle A=\alpha=30^\circ,$ $AC=2,$ следовательно, $CK=\frac{1}{2}AC=1$

Ответ: 1.

№7: Один из углов треугольника равен 48°. Высота, проведённая к стороне, прилежащей к этому углу равна половине стороны противолежащей к этому углу. Найдите разность между наибольшим и наименьшим углами треугольника.

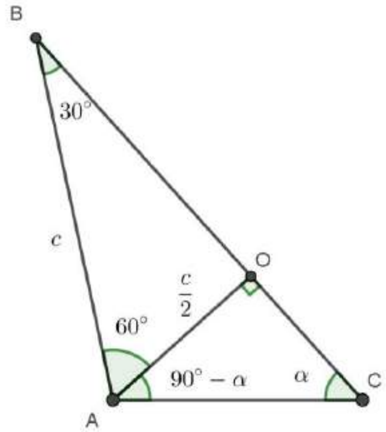
Решение.

Пусть известный угол треугольника ABC равен $\angle C=\alpha$, тогда сторона противолежащая этому углу равна c, а высота проведённая к одной из прилежащих сторон равна $\frac{c}{2}$. Рассмотрим два случая, которые возможны в этой задаче.



1) AC - прилежащая сторона к известному углу, BH - высота. Из условия: $\angle BAH = 30^\circ$, $\angle ABH = 60^\circ$. В треугольнике BHC: $\angle C = \alpha = 48^0$,

$\angle B = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 48^0 = 42^0$. В треугольнике ABC : $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ + 90^\circ - 48^0 = 102^0$, $\angle C = 48^0$ - известен.



2) BC - прилежащая сторона к известному углу, AO - высота. Заметим, что этот случай, с точностью до обозначений, повторяет первый случай. Из условия: $\angle ABO = 30^\circ$, $\angle BAO = 60^\circ$. В треугольнике AOC : $\angle C = 48^0$, $\angle A = 90^0 - 48^0 = 42^0$. В треугольнике ABC : $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 42^\circ$, $\angle C = 48^0$ - известен.

Таким образом, углы треугольника ABC равны 30°, 102°, 48^0.

Ответ. 72.

№8: Решите уравнение. В ответе укажите сумму его корней.

$$\left(x^2-4\right)\left(x+3\right)-10\left(3x-4\right)\sqrt{x+3}+3x\left(x+3\right)=10x^2\sqrt{x+3}-21\left(x^2+3x\right)+84.$$

Решение: О.Д.З. уравнения: $x \geq -3$. После группировки слагаемых приведём уравнение к виду $(x+3)(x^2+3x-4) = 10\sqrt{x+3}\,(x^2+3x-4) - 21(x^2+3x-4)$;

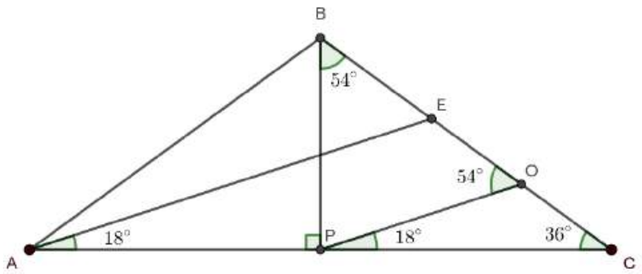
$(x^2+3x-4)\left(x+3-10\sqrt{x+3}+21\right) = 0$

$(x-1)(x+4)(\sqrt{x+3}-7)(\sqrt{x+3}-3)=0$; $x_1=1$, $x_2=-4$ - не подходит по О.Д.З. , $x_3=46$, $x_4=6$. Суммируем корни: 46+6+1=53.

Ответ: 53.

№9: Угол, образованный высотой BP равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ и боковой стороной, равен 54°. Биссектрисы, проведённые к боковым сторонам равны 4. Найдите длину наименьшей биссектрисы.

Решение.



Дан треугольник ABC $(AB=BC)$, AE - биссектриса, BP - высота, $AE=4$, $\angle PBC=54^\circ$. Проведём PO параллельно AE. Получим треугольник POC , в котором $\angle OPC=\angle EAC=\dfrac{180^\circ-2\cdot 54^\circ}{4}=18^\circ$, $\angle OCP=90^\circ-54^\circ=36^\circ$. Следовательно, $\angle POB=54^\circ$, треугольник POB равнобедренный и $BP=PO=\dfrac{1}{2}\cdot AE=2$. Таким образом, длина наименьшей биссектрисы BP равна 2.

Ответ: 2.