Решения варианта 1.

№1. (12 баллов**)** В классе меньше 30 человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

Решение. Вероятность выбора отличницы среди девочек равна

$$\frac{3}{13}=\frac{\text{количество девочек-отличниц}}{\text{количество девочек}}.$$

Учитывая, что количество девочек – число натуральное и их меньше 30, находим, что в классе либо 13 девочек (3 отличницы), либо 26 (6 отличниц).

Применяя те же рассуждения к мальчикам, находим, что

$$\frac{4}{11}=\frac{\text{количество мальчиков-отличников}}{\text{количество мальчиков}}.$$

Следовательно, в классе либо 11 мальчиков (4 отличника), либо 22 мальчика (8 отличников). Так как в классе меньше 30 человек, определяем, что в классе 13 девочек (3 отличницы) и 11 мальчиков (4 отличника). Значит, в классе количество отличников $3+4=7$.

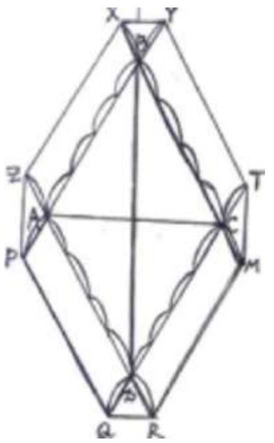
Ответ: 7.

Баллы	Критерии выставления
12	Обоснованно получен правильный ответ.
8	Получен правильный ответ, но в решении не учтены все возможные варианты количеств мальчиков и девочек в классе.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

№2. (12 баллов). Площадь ромба равна 8 кв. см. Каждую его сторону продлили на четверть своей длины в обе стороны. Концы всех этих отрезков соединили. Найдите площадь полученной фигуры.

Решение. Площадь искомой фигуры можно рассматривать как сумму площади исходного ромба, четырех равных параллелограммов площадью 2 кв. см каждый и двух пар равновеликих треугольников площадью 0,25 кв. см. Возможны другие разбиения или дополнительные построения. Площадь фигуры 17 кв. см. Необходимо обосновать равенство площадей и показать знание формул для вычисления площади треугольника и параллелограмма.

Ответ: 17 кв. см



Баллы	Критерии выставления
12 баллов	Обоснованное правильное решение
10 баллов	Правильный ответ при некоторой недостаточности объяснений.
5 баллов	Верные рассуждения с арифметической ошибкой.

№3. (16 баллов) Катя хочет купить корм для кошек. В прошлый раз вся покупка обошлась ей в 48 рублей. У подруги она узнала, что товар подорожал. В магазине выяснилось, что стоимость одной упаковки выросла на столько рублей, на сколько число 5,5 больше числа купленных упаковок товара. Известно, что за всю покупку Катя заплатила наибольшую из возможных сумму денег. Определите эту сумму. Сколько упаковок корма было куплено? Определите стоимость одной упаковки.

Решение. Пусть x – количество купленных упаковок корма, тогда 5,5-x –на сколько рублей выросла стоимость одной упаковки. (5,5-x) x -на сколько рублей выросла стоимость покупки. y=48+(5,5-x) x рублей стоимость покупки.

$y=48+(5,5-x)\,x= - x^2+5,5x+48$

$x_в =2,75$;

$x_1=3$, $y_1=48+2,5*3=55,5$;наибольшая из возможных сумма денег.

$x_2=2$, $y_2=48+3,5*2=55$;

одна упаковка стоит 18,5 рублей.

Ответ. а) 55,5- наибольшая из возможных сумма денег;

б) куплено 3 упаковки корма;

в) одна упаковка стоит 18,5 рублей.

Примечание. Можно решать по другому. $x \in (0;5,5)$ и $x \in N$, значит $x \in \{1;2;3;4;5\}$

$x_1=3$, $y_1=48+2,5*3=55,5$ наибольшая из возможных сумма денег.

$x_2=2$, $y_2=48+3,5*2=55$;

$x_3=1$, $y_3=48+4,5*1=52,5$;

$x_4=4$, $y_4=48+1,5*4=54$;

$x_5=5$, $y_5=48+0,5*5=50,5$;

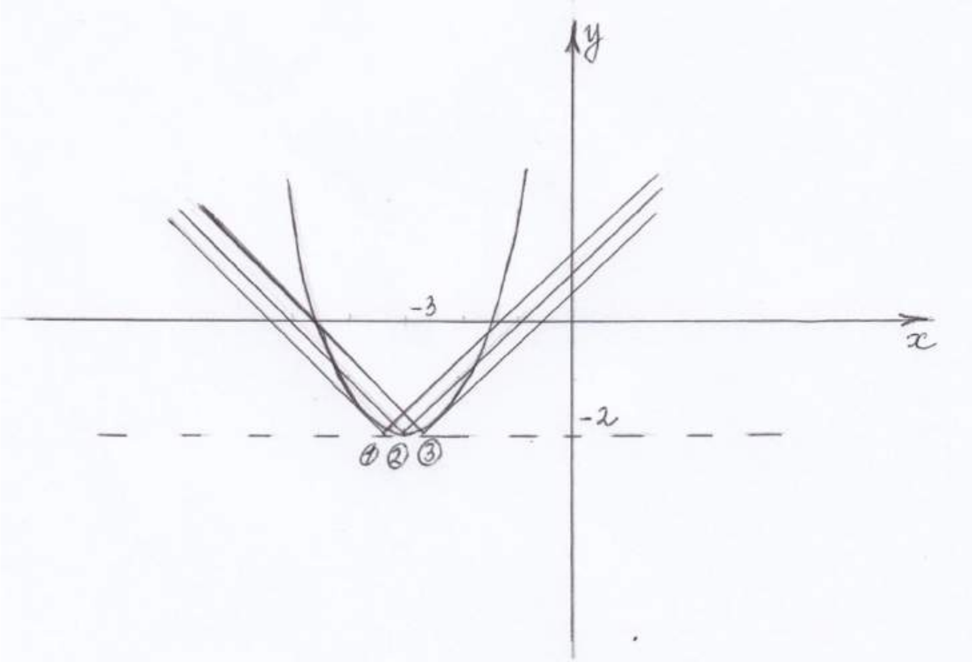
Ответ. а) 55,5- наибольшая из возможных сумма денег;
б) куплено 3 упаковки корма;
в) одна упаковка стоит 18,5 рублей.

Баллы	**Критерии выставления**
16	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, но без учёта ОДЗ.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№4. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7 \\ y = |x-a| - 2 \end{cases}$ имеет четыре различных решения. Найдите эти решения при каждом a.

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} y = (x+3)^2 - 2 \\ y = |x-a| - 2 \end{cases}$. Первое уравнение системы –уравнение параболы с вершиной (-3;2). График второго уравнения – смещённый график функции $y = |x|$, вершина которого перемещается в зависимости от параметра вдоль горизонтальной прямой $y = -2$.

На рисунке график функции $y = |x-a| - 2$ изображён в предельных случаях, соответствующих трём различным решениям системы:



(1) – левая ветвь графика модуля касается параболы; (2) – вершины графиков совпадают; (3) – правая ветвь модуля касается параболы. Если вершина графика модуля расположена между точками, соответствующими случаям (1) и (2) или (2) и (3), то графики будут иметь четыре точки пересечения и, следовательно, система будет иметь четыре решения.

В случае (2) $a=-3$. Найдём значения параметра, соответствующие случаям (1) и (3). $y=\left[\begin{array}{l} x-a-2, x\ge a \\ -x+a-2, x<a \end{array}\right.$. Для случая (1) получим уравнение $x^2+6x+7=-x+a-2$; $x^2+7x+9-a=0$.

При касании графиков дискриминант этого уравнения должен быть равен нулю, при пересечении в двух точках больше нуля. $D=49-4(9-a)=13+4a=0; a=-\frac{13}{4}$.Выразим корни через параметр для положительного дискриминанта: $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{13+4a}}{2}$.

Для случая (3) получим уравнение: $x^2+6x+7=x-a-2;\ x^2+5x+9+a=0;$ $D=25-4(9+a)=-11-4a=0.\ x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{-11-4a}}{2}$.

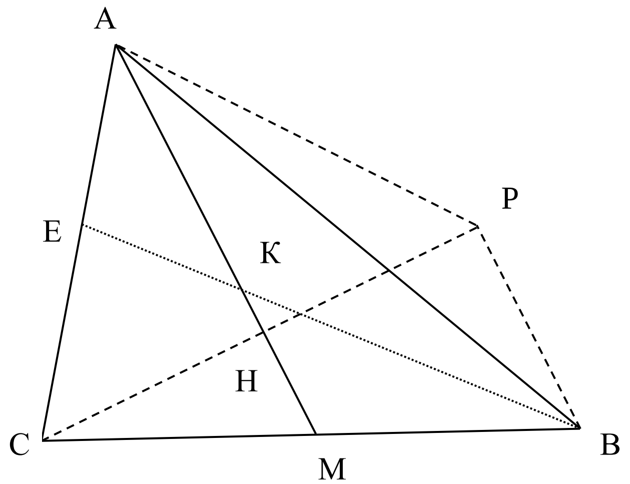
Таким образом, система имеет 4 решения при $a\in(-\frac{13}{4};-3)\cup(-3;-\frac{11}{4})$.

Ответ: $(-\frac{13}{4};-3)\cup(-3;-\frac{11}{4})$ $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{13+4a}}{2}$; $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{-11-4a}}{2}$.

Баллы	Критерии выставления
20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	Ответ по параметру отличается от правильного одной точкой, решения выписаны; или верно найдены значения параметра, но не указаны сами решения.
10 баллов	Правильно выполнено больше половины решения, но оно не завершено; или из-за арифметической ошибки получен неправильный ответ.
0 баллов	В остальных случаях – 0 баллов. Только правильный ответ без решения.

№5. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на медиане AM выбирается точка K так, что AK = CM. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Величина угла BEC в два раза больше величины угла CAM. Найдите величину угла AMB в градусах.

Решение. Проведем отрезок CH⊥AM и продолжим его до P так, что HP = HC=> PB ││AM.



Треугольник CAP – равнобедренный (AH – медиана и высота) поэтому ∠PAM =∠MAC, но ∠MAC=∠AKE (так как величина угла BEC в два раза больше величины угла CAM), ∠AKE=∠MKB (вертикальные), ∠MKB =∠KBP (накрест лежащие), следовательно, KB ││AP, поэтому AKBP - параллелограмм.

В прямоугольном треугольнике CPB длина CB=2PB, т.е. ∠PCB=30^0. Итак, ∠AMB=120^0.

Ответ: 120^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6. (20 баллов**)** Решите неравенство:

$$\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right| \geq \left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right|$$

Решение:

Преобразуем правую часть неравенства, получим

$$\left|\left|\sqrt{\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{9x^2+6x+1}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right| =$$

$$\left|\left|\sqrt{\frac{4x-1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{(3x+1)^2}}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right| =$$

$$\left|\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1-\sqrt{2-|3x+1|}}{\sqrt{2-|3x+1|}}\right|\right| = \left|\left|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1\right|-\left|\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}-1\right|\right|$$

Заметим, что если сделать замену $a=\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1;\ b=\frac{1}{\sqrt{2-|3x+1|}}-1$, то исходное неравенство примет вид: $|a-b| \geq |a|-|b|$, что верно при любых значениях a и b.

Докажем, это. Возведем обе части неравенства в квадрат, получим:

$|a-b|^2 \geq (|a|-|b|)^2 \iff (a-b)^2 \geq (|a|-|b|)^2 \iff$

$a^2-2ab+b^2 \geq |a|^2-2\,|a||b|+|b|^2 \iff -2ab \geq -2\,|a||b| \iff ab \leq |ab|$,

что верно для любых значений a и b.

Следовательно, исходное неравенство верно на ОДЗ:

$$\begin{cases} 4-\dfrac{1}{x}\geq 0 \\ 2-|3x+1|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x}\geq 0 \\ -2<3x+1<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{4};\ +\infty\right) \\ x\in\left(-1;\ \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Получаем ответ: $x\in(-1;0)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$**.**

Баллы	**Критерии выставления**
20	Обоснованно получен правильный ответ
15	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Задача сведена к неравенству $|a-b|\geq|a|-|b|$, неравенство доказано
5	Задача сведена к неравенству $|a-b|\geq|a|-|b|$
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

Решения варианта 3

№1. (15 баллов) Решить неравенство:

$$\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)(x^2-2x+2+|x-2|)\le\sqrt{15+2x-x^2}$$

Решение:

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\ge 4.$

Раскрыв скобки, получаем: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, учитывая, что числа положительные $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\ge 0.$

Поскольку на ОДЗ уравнения имеем $x^2-2x+2>0$, $|x-2|>0$, применяя доказанное неравенство получаем, что для любого x левая часть неравенства не меньше 4.

В то же время правая часть неравенства

$\sqrt{15+2x-x^2}=\sqrt{16-(x-1)^2}\le 4$.

Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

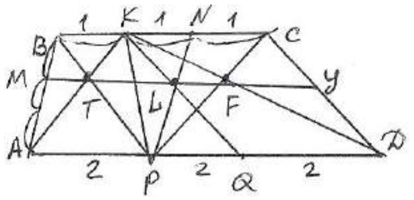
$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{|x-2|}\right)(x^2-2x+2+|x-2|)=4\\ \sqrt{15+2x-x^2=4}\end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что $x=1$, подставляем в первое уравнение системы, получаем, что $x=1$ его решение, следовательно, $x=1$ решение исходного неравенства.

Ответ: $x=1$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№2. (15 баллов) В трапеции ABCD точки K,N принадлежат отрезку BC, BK=KN=NC=1, а точки P,Q принадлежат отрезку AD, AP=PQ=QD=2. Прямые BC и AD параллельны. Точка K соединена с точками A,P,Q,D. Точка P соединена с точками B,K,N,C. Докажите, что точки пересечения прямых BP и AK, KQ и PN, KD и PC лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции.



1) Пусть $BP \cap AK = T,\ KD \cap PC = F,\ KQ \cap PN = L$;

2) $\Delta\, BTK \backsim \Delta\, ATP,\ \frac{KT}{AT} = \frac{1}{2}$

3) $\Delta\, KLN \backsim \Delta\, PLQ,\ \frac{KL}{LQ} = \frac{1}{2}$

4) $\Delta\, TKL \backsim \Delta\, AKQ,\ TL \parallel AQ$

5) $\Delta\, KFC \backsim \Delta\, PFD,\ \frac{KF}{FD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\, KLF \backsim \Delta\, KQD,\ LF \parallel QD$

6) $TL \parallel AD,\ LF \parallel AD$, следовательно точки *T*, *L*, *F* лежат на одной прямой, параллельной *AD*;

7) Пусть $TL \cap AB = M,\ TL \cap CD = Y$. Тогда по обобщенной

теореме Фалеса $\frac{BM}{MA} = \frac{1}{2} = \frac{CY}{YD}$

8) Проведем *BE* параллельно *CD*, тогда *BEDC* параллелограмм по определению и *ED*=*BC*=3. Прямая *TL* пересекает *BE* в точке *Z*, $\frac{BZ}{ZE} = \frac{1}{2}$ по обобщенной теореме Фалеса , тогда *ZY*=3, а MZ= $\frac{AE}{3} = 1, MY = 4$.

Ответ: 4.

Баллы	Критерии выставления
15 б	Полное обоснованное решение.
10 б	Присутствуют доказательство и верный ответ, но есть недостатки в обосновании.
5 б	Присутствует доказательство того, что точки лежат на одной прямой **или** вычислена длина отрезка**.**

№3. (15 баллов) Степан решил выставить на аукцион 44 страуса редкой породы, стартовая стоимость каждой особи равнялась 2,5 тыс. рублей. После продажи выяснилось, что средняя цена каждой птицы выросла на столько же тысяч рублей, сколько страусов не продал Степан. Какую наибольшую сумму денег мог получить Степан? Какое количество птиц при этом он мог продать?

Решение. Пусть x – количество непроданных страусов, тогда (44-x)-количество проданных страусов, (2,5+x) -средняя цена 1 проданной птицы. (44-x)(2,5+x) –стоимость проданных страусов.Рассмотрим функцию y=(44-x)(2,5+x) – стоимость проданных страусов.

$x_в$=20,75. Так как x- натуральное число, то x=20 или x=21. Если x=20, то y=540, при этом страусов продали 24 штуки.

Если x=21, то y=540,5, при этом страусов продали 23 штуки.

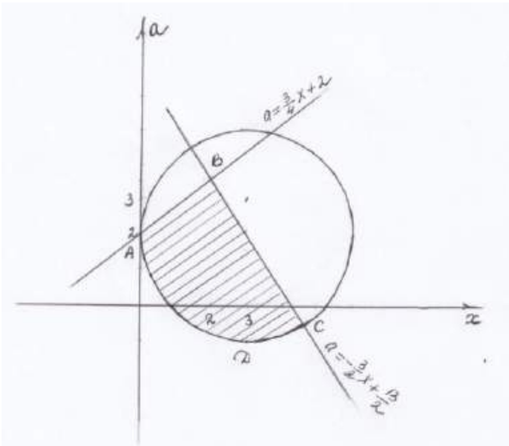
Ответ. а) наибольшая сумма, которую мог получить Степан 540,5 тыс рублей;

б) наибольшее количество птиц - 23 штуки.

Баллы	**Критерии выставления**
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

№4. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}(x-3)^2+(a-2)^2\le 9\\ 4a-3x\le 8\\ 2a\le 13-3x\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и указать решения системы для каждого значения a.

Преобразуем систему к виду $\begin{cases}(x-3)^2+(a-2)^2\le 3^2\\ a\le \dfrac{3}{4}x+2\\ a\le -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}\end{cases}$ и начертим в одной системе координат в осях x, a графики окружности и двух прямых $a=\dfrac{3}{4}x+2$ и $a=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{2}$ (см. рисунок).



Заштрихованная область удовлетворяет всем неравенствам системы. Точка D(3;-1) – нижняя точка окружности. Найдём координаты точки В – точки пересечения прямых: $\frac{3}{4}x+2=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$; В(2;3,5). Из рисунка видно, что $a\in\left[-1;3,5\right]$ соответствует хотя бы одно значение x, то есть при этих значениях параметра существует хотя бы одно решение. Чтобы выписать сами решения, найдём ещё координаты точек А и С пересечения окружности с прямыми. Подставим вместо a в уравнение окружности a= $\frac{3}{4}x+2$, получим уравнение $(x-3)^2+(\frac{3}{4}x+2-2)^2=9$; $\frac{25}{16}x^2-6x=0$, имеющее корни $x_1=0$; $x_2=\frac{96}{25}$. Таким образом, А(0;2). Аналогично находятся координаты точки С.

$(x-3)^2+(\frac{3}{4}x+2-2)^2=9$; $13x^2-78x+108=0$; $x_{1,2}=3\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$. Точка С имеет координаты $(3+\frac{6}{\sqrt{13}};2-\frac{9}{\sqrt{13}})$.

Выразим x через a из уравнения окружности: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{(a+1)(5-a)}$. Теперь с помощью проделанного исследования можно по графику записать ответ.

Ответ: $a\in[-1;3,5]$ **- система имеет хотя бы одно решение.** $a=-1, x=3$;

$a\in(-1;2-\frac{9}{\sqrt{13}}], x\in[3-\sqrt{(a+1)(5-a)};3+\sqrt{(a+1)(5-a)}]$;

$a\in(2-\frac{9}{\sqrt{13}};2], x\in[3-\sqrt{(a+1)(5-a)};\frac{13-2a}{3}]$; $a\in(2;3,5), x\in[\frac{4a-8}{3};\frac{13-2a}{3}]$

Баллы	Критерии выставления
15 баллов	Полное обоснованное решение
13 баллов	Одна – две неправильно поставленные скобки (например, интервал вместо отрезка при выписыварии решений) .
10 баллов	Графики построены правильно, ход решения верный. Ответ незначительно отличается от правильного из-за арифметической ошибки при нахождении координат одной из точек пересечения графиков. Или небольшие ошибки (описки) при выписке решений.

5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых система имеет хотя бы одно решение. Сами решения в зависимости от параметра не указаны или указаны неверно .

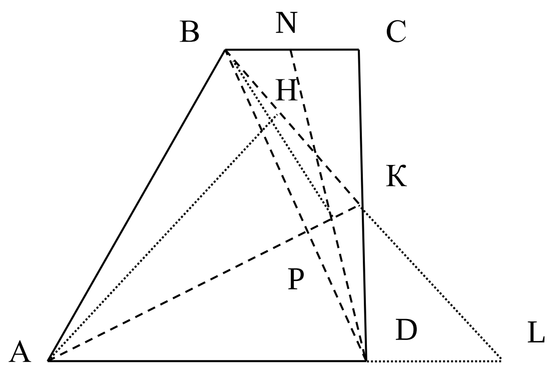
№5. (20 баллов)

В прямоугольной трапеции ABCD (AD││BC) угол A равен 60^0. На стороне CD выбирается точка K так, что BK=2BC, при этом AD=CD. Биссектриса $\angle$BDC пересекает сторону BC в точке N, а AK и DN пересекаются в точке P. Найдите величину угла DPB в градусах.

1.1 Продолжим BK до пересечения с прямой AD в точке L.

Треугольник ABL – правильный, так как из BK=2BC $\Rightarrow \angle KBC=60^0 \Rightarrow \angle ABL=120^0-60^0=60^0$. $\angle BKC=30^0 \Rightarrow \angle BKD=150^0$ (смежный).

Проведем отрезок AH$\perp$ BK =>AH = CD = AD (AH и CD – высоты).



Треугольники AHK и AKD – равны по гипотенузе AK и катетам AH и AD => AK – биссектриса $\angle$BKD => P – точка пересечения биссектрис DN и AK треугольника BKD.

По свойству точки пересечения биссектрис: $\angle DPB=90^0+0{,}5\angle BKD=90^0+75^0=165^0$.

Ответ: 165^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты(например, AH=AD), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6. (20 баллов).

Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 15.00 до 16.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 15 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 16.00. Определитьвероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

Ответ: $\frac{107}{864}$.

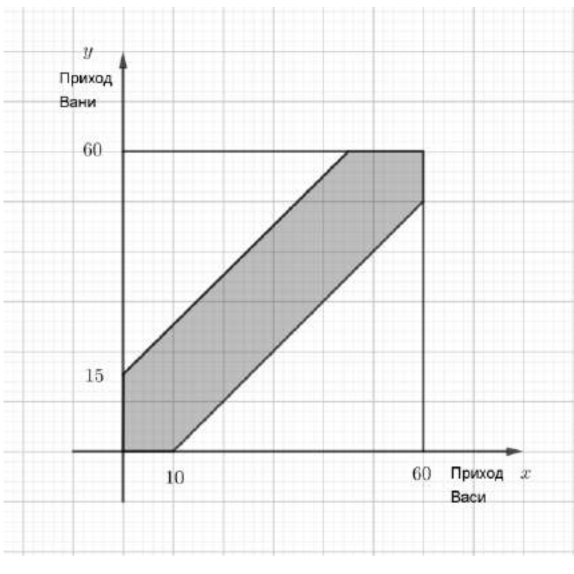
Решение. Так как Ксюша совсем не будет ждать, то ребята пойдут в кино, только если Ксюша придет последней. Время прихода ребят – независимые события, следовательно,

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) =$$

$$= P(\text{Ксюша придёт последней}) \cdot P(\text{Ваня и Вася встретятся}).$$

Далее, $P(\text{Ксюша придёт последней}) = \dfrac{\text{число подходящих вариантов}}{\text{число перестановок из 3 элементов}} = \dfrac{2}{3!} = \dfrac{1}{3}$.

Вторая вероятность находится геометрически. Обозначим: x - момент прихода Васи, y - момент прихода Вани, $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$. Тогда область $\begin{cases} y \ge x \\ y - x \le 15 \end{cases}$ соответствует тому, что первым пришел Вася и он дождался прихода Вани, а область $\begin{cases} y \le x \\ x - y \le 10 \end{cases}$ - тому, что первым пришел Ваня и он дождался прихода Васи. Таким образом, получаем благоприятную область для события «Ваня и Вася встретятся»:



Следовательно,

$$P(\text{Ваня и Вася встретятся}) = \frac{60^2 - \frac{1}{2}\cdot 45^2 - \frac{1}{2}\cdot 50^2}{60^2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = \frac{107}{288},$$

$$P(\text{все трое пойдут в кино вместе}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{107}{288} = \frac{107}{864}.$$

Баллы	**Критерии выставления**
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Построена вероятностная модель, в рамках которой возможно получение правильного ответа (например, в решении задачи используется координатная плоскость для определения геометрической вероятности соответствующих событий).
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.

Решение варианта 5

1. (15 баллов) Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

Решение: Пусть x – количество раков, которое осталось лежать на прилавке, тогда купили (32-x) рака, (x-4,5) – стоимость одного рака.

(32-x) (x-4,5) -стоимость всех раков.

y=(32-x) (x-4,5)

$x_в$=18,25.

x_1=19, y_1=(32-19) (19-4,5) =13*14,5=188,5.

x_2=18, y_2=(32-18) (18-4,5) =14*13,5=189. Наибольшее количество 14 штук.

Ответ: а) наибольшая сумма денег189 рублей;
б) продал 14 раков.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка .
5	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

2. (15 баллов) Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон x,y,z и $y,z,$p. В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

Решение: Запишем условие подобия треугольников.

$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{p}=k; y^2=xz; z^2=yp$ или $x=yk, y=zk$. Поскольку треугольники подобны, достаточно записать условия существования треугольника (неравенство треугольника) только для одного из них $\begin{cases} k^2+1>k \\ 1+k>k^2 \\ k^2+k>1 \end{cases}$. Решая систему этих условий, получаем, что $k\in\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)$. Все найденные значения k лежат правее 0, но левее 2.

Ответ: 0 и 2.

Критерии проверки:

15 б	Полное обоснованное решение
10 б	Есть арифметическая ошибка при решении системы условий.
5 б	Выписаны не все условия существования треугольников или присутствует перебор целых значений коэффициента подобия.

3. Решить неравенство:

$$\frac{2|2x-1|+2}{3}+\frac{6}{1+|2x-1|}\leq 4-\sqrt{16x^4-8x^2+1}$$

Решение:

ОДЗ неравенства есть все действительные числа. Переписав левую часть неравенства в виде $2\left(\frac{|2x-1|+1}{3}+\frac{3}{1+|2x-1|}\right)$, замечаем, что она не меньше 4, как удвоенная сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при $1+|2x-1|=3$ она равна 4.

В то же время правая часть неравенства

$4-\sqrt{16x^4-8x^2+1}=4-\sqrt{(4x^2-1)^2}=4-|4x^2-1|\leq 4.$ Следовательно, неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}1+|2x-1|=3\\4-|4x^2-1|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-1|=2\\|4x^2-1|=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-0{,}5;\ \ 1{,}5\\ \ \ x=\pm 0{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-0{,}5$$

Ответ: $x=-0{,}5$.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки
10	Верно выполнены оценки обеих частей неравенства и/или задача сведена к равносильной системе уравнений
5	Верно выполнена оценка одной части неравенства
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

4. (15 баллов) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(x^2+(2a-1)x-4a-2)\cdot(x^2+x+a)=0$ имеет три различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}x^2+(2a-1)x-4a-2=0\\x^2+x+a=0\end{array}\right.$ и может иметь от нуля до четырёх корней. Оно имеет три различных корня, если одно из уравнений совокупности имеет два различных корня (D>0), а другое один (D=0) и этот корень не совпадает ни с одним из корней другого уравнения; или если оба уравнения имеют по два различных корня, но один из корней первого уравнения совпадает с одним из корней второго уравнения. Исследуем эти возможные варианты. $D_1=(2a-1)^2-4(-4a-2)=4a^2+12a+9=(2a+3)^2$. Первое уравнение всегда имеет решение: при $a=-1{,}5$ одно ($x=2$), при остальных значениях параметра – два различных решения $x_{1,2}=\dfrac{1-2a\pm(2a+3)}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-2a-1\end{array}\right.$.

$D_2=1-4a$. Второе уравнение имеет одно решение при $a=0{,}25$, два различных решения при $a<0{,}25$, и не имеет решений при остальных a.

Исследуем теперь вопрос совпадения корней. Можно решать соответствующие иррациональные уравнения. Рассмотрим другой метод. Если число x_0 является одновременно корнем двух различных уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$, то x_0 является одновременно и корнем уравнения $k_1f(x)+k_2g(x)=0$ при любых k_1 и k_2. Будем подбирать такие значения коэффициентов, чтобы сначала сократились слагаемые, содержащие x^2, а затем свободные члены уравнений.

При $k_1=1$, $k_2=-1$ получим $x^2+(2a-1)x-4a-2-x^2-x-a=0$;

$(2a-2)x-5a-2=0$ (1).

Затем возьмём $k_1=a$, $k_2=4a+2$. Получим уравнение

$ax^2+a(2a-1)x-2a(2a+1)+2(2a+1)x^2+2(2a+1)x+2a(2a+1)=0$;

$(5a+2)x^2+x(2a^2-a+4a+2)=0$. $x=0$ не является общим корнем уравнений, поэтому можно сократить на x. Получим

$x(5a+2)+(2a^2+3a+2)=0$ (2).

Так как общий корень должен удовлетворять обоим полученным линейным уравнениям, для a должно выполняться соотношение

$(5a+2)^2=(2-2a)\cdot(2a^2+3a+2)$. $(5a+2)^2=(2-2a)\cdot(2a^2+3a+2)$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим уравнение $4a^3+27a^2+18a=0$,которое имеет три различных корня: 0 ; -6 ; -0,75. Все найденные значения параметра удовлетворяют условию существования корней второго уравнения $a\le 0{,}25$.

Объединяя полученные значения со значениями, в которых равен нулю дискриминант одного из уравнений(в этих точках сдваивания корней нет), получим ответ.

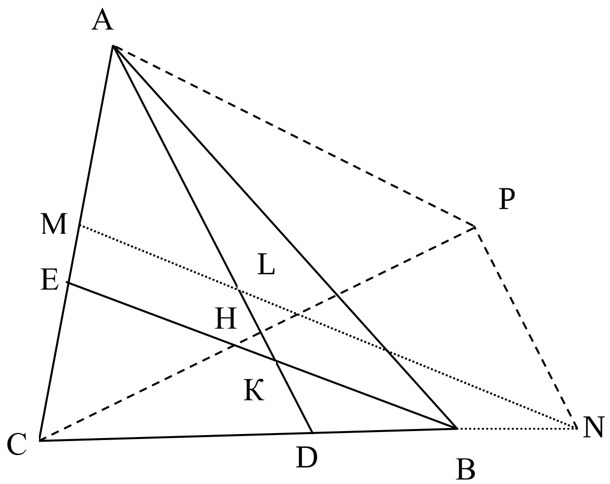
Ответ: -6 ; -1,5 ; -0,75 ; 0 ; 0,25 .

15 баллов	Полное обоснованное решение
10 баллов	Ход решения верен, все его этапы присутствуют, но из-за арифметической ошибки или невнимательности ответ отличается от правильного одним значением. Или при правильном ответе обоснования недостаточны
5 баллов	Правильно найдены только значения параметра, при которых равен нулю дискриминант одного из уравнений. Возможность совпадения корней двух квадратных трёхчленов не учитывается .
	Замечание. При графическом решении, возможном в 1 варианте, начисляем 3 балла за каждое правильно найденное значение параметра. Таким образом, при правильном ответе получится 15 баллов.

5. (20 баллов) В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что CD:DB =2:1, а на отрезке AD – точка K, при этом AK = CD+DK. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Треугольник AEK – равнобедренный (AE=EK). Найдите величину угла ADC в градусах.

Решение: Продолжим CB за точку B так, чтобы BN = BD. Проведем NM││BE. NM пересекает AD в точке L. Проведем отрезок CH⊥AD. Продолжим его до P так, что HP = HC, PN││AD.

В треугольнике DLN отрезок BK – средняя линия, следовательно, DK = KL и поэтому AL=AK–LK=AK–DK=CD.



Треугольник CAP – равнобедренный (AH – медиана и высота) поэтому ∠PAD =∠DAC, но ∠DAC=∠AKE (по условию), ∠AKE=∠ALM (соответственные), ∠ALM =∠NLD (вертикальные), ∠NLD =∠NLP (накрест лежащие), следовательно, LN││AP, поэтому ALNP - параллелограмм.

В прямоугольном треугольнике CPN длина CN=2CD=2AL=2PN, т.е. $\angle PCN=30^0$. Итак, $\angle ADC=60^0$.

Ответ: 60^0.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
15	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
7	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

6. (20 баллов) Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Ответ: 0,04.

Решение. Пусть в i -ой корзине n_i шаров, среди которых k_i белых, $i=1,2$. Тогда

$\frac{k_1}{n_1}\cdot\frac{k_2}{n_2}=0,54=\frac{27}{50}$. Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства

$k_1\cdot k_2=27m$, $n_1\cdot n_2=50m$. Одно из чисел n_i делится на 5, тогда и второе из них тоже делится на 5 (так как $n_1+n_2=25$).

Пусть $n_1\le n_2$. Возможны два случая:

1) $n_1=5$, $n_2=20$. Тогда $m=2$, $k_1\cdot k_2=54$, причем $k_1\le 5$, $k_2\le 20$, так что $k_1=3$, $k_2=18$.

2) $n_1=10$, $n_2=15$. Тогда $m=3$, $k_1\cdot k_2=81$, причем $k_1\le 10$, $k_2\le 15$, так что $k_1=9$, $k_2=9$.

В обоих случаях вероятность вынуть два черных шара равна $\left(1-\frac{k_1}{n_1}\right)\cdot\left(1-\frac{k_2}{n_2}\right)=0,04$.

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованно получен правильный ответ.
10	В решении рассмотрены не все возможные из случаев распределения шаров по корзинам или нет обоснования того, что все возможные случаи рассмотрены.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий.