

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

**Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2018 г.**

8 класс

1) Миша играл по одной партии в нарды либо с мамой, либо с папой. У мамы он всегда выигрывал, а у папы - ему удавалось выиграть в 1 случае из 5. За год Мише удалось выиграть ровно половину партий. Какую долю партий он играл с мамой?

При необходимости ответ округлите до тысячных.

Ответ: 0,375.

Решение: Пусть за год Миша сыграл с мамой x (т.е. выиграл у мамы) и выиграл у папы y партий. Тогда всего партий было $x+y$. По условию, $x/(x+y) = 1/2$, откуда $x=y$. Доля сыгранных с мамой партий составляет $x/(x+y) = y/(y+y) = 1/2$.

2) В ящике лежат 222 носка: желтые, синие, чёрные и белые. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 200, то среди них обязательно найдутся четыре носка различных цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись три носка различных цветов?

Ответ: 177.

Решение: Носков каждого цвета не меньше 23 (иначе все они могут оказаться среди 22 оставшихся в ящике). Значит, носков двух цветов не больше $222 - 46 = 176$. Следовательно, среди любых 177 носков, будут носки по крайней мере трёх цветов. 176 шариков недостаточно, например, для распределения цветов 153, 23, 23, 23.

3) Построить график функции $f(x) = \left| \left| \frac{x^2+x}{x+1} - \frac{x^2-8x+16}{4-x} \right| - 4 \right|$. При каких значениях параметра a уравнение $f(x)=a$ имеет три решения? В ответе укажите сумму искомых значений параметра.

Ответ: 6.

Решение:

После преобразования получим $f(x)=|2x-4|-4$, ОДЗ: все числа кроме -1 и 4.

По графику очевидно что 3 решения возможно только при $a=2$ и $a=4$.

$2+4=6$.

4) В прямоугольном треугольнике MPK угол P прямой. KP – меньший катет и $KP=5$. На гипотенузе MK выбрана точка E такая, что $ME=PM$. На катете MP выбрана точка N такая, что $EN=MN=4,2$. Найдите периметр четырехугольника $KENP$.

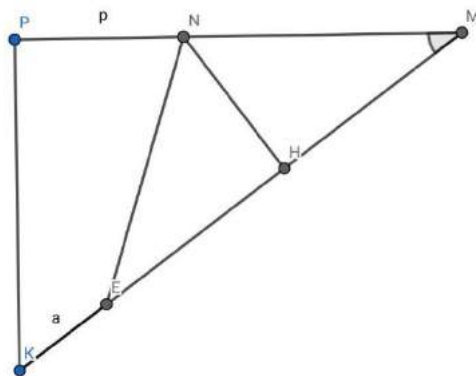
Ответ: 13,4.

Решение:

$$ME = 2 \cdot 4,2 \cdot MP / MK = MP$$

$$KE + PN + NE = KE + PN + NM = KE + ME = MK$$

$$MK = 8,4$$

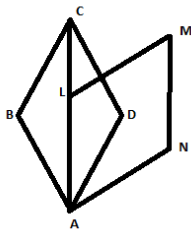


5) Какое наибольшее количество 16% раствора кислоты можно получить, если имеется по 60 литров 10%, 20% и 30% растворов кислоты? При необходимости ответ округлите до десятых.

Ответ: 128,6.

Решение: Если смешать все имеющиеся растворы, то получится 180 литров 20% раствора кислоты. Чтобы получить 16% раствор, придется это количество уменьшать. При этом бесполезно уменьшать количество 10% или 20% растворов, т.к. от этого процентное содержание кислоты не уменьшится. Значит, надо уменьшить "вклад" 30% раствора. Возьмем по 60 литров первых двух растворов и x литров 3 раствора. Тогда, приравнявая объем кислоты до и после смешивания, получим: $60 \cdot 0,1 + 60 \cdot 0,2 + 0,3x = 0,16(60 + 60 + x)$. Следовательно, $x = 60/7$. Всего получится 128 целых и $4/7$ литра.

6) Ромбы $ABCD$ и $ALMN$ пересекаются так, как показано на рисунке. Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равны 60° . Площадь пересечения ромбов равна $\sqrt{3}$, объединения - $7\sqrt{3}$. Найти площади ромбов. В ответ записать наибольшую из них. При необходимости ответ округлите до десятых.



Ответ: 10,4.

Решение: сумма площадей $8\sqrt{3}$, площадь $DBHG$ $3\sqrt{3}$

Сумма площадей BHE и GHC равна $2\sqrt{3}$

Пусть левый ромб меньше, тогда площадь $ECG \geq 2\sqrt{3}$,

значит $GD \geq 3DC$

$$GD = DE\sqrt{3}$$

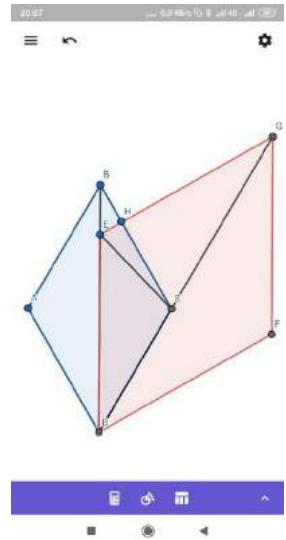
$$DB = DC\sqrt{3}$$

$$DE \geq DB$$

Если E лежит на продолжении DB , то площадь правого ромба

$> 6\sqrt{3}$, площадь левого $= 2\sqrt{3}$

Остаётся один вариант.



7) Два путника вышли одновременно – один из A в B , а другой из B в A . Шли они равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому осталось идти ещё 16 часов, а второму – 9 часов. Через сколько часов после выхода они встретились?

Ответ: 12.

Решение: Пусть путники встретятся через x (ч), скорость из A в B V_1 (км/ч), а из B в A V_2 (км/ч). Получим уравнения: $V_2x = V_1 \cdot 16$ и $V_1x = V_2 \cdot 9$, решив систему из которых получим: $x = 12$ (ч).

8) В треугольнике ABC точка K принадлежит AB и $AK:KB=5:3$. Через вершину B проведена прямая, параллельная отрезку CK , пересекающая продолжение стороны AC в точке D . Найти $BF:FC$, если точка E – середина BD , а прямая AE пересекает сторону BC в точке F .

Ответ: 1,6.

Решение: Из подобия $AC:AD=5:8$

По теореме Менелая в треугольнике BCD

$$BF:FC \cdot CA:AD \cdot DE:EB = 1$$

$$BF:FC = 8:5.$$

9) Решите в целых числах уравнение $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$.

В ответе укажите сумму значений x , являющихся решениями.

Ответ: -24.

Решение:

$$9xy + 42x + 51y + 213 = 0$$

$$(3x+17)(3y+14) = -25$$

$$3x = 8, -12, -16, -18, -22, -42$$

$$x = -4, -6, -14$$

$$y = -3, -13, -5$$