Решения заданий варианта № 1

1. Фермер первоначально разместил свою продукцию в ящики вместимостью по 8 кг, но один ящик оказался загруженным не полностью. Тогда всю продукцию фермер переложил в ящики вместимостью по 6 кг, однако понадобилось на 8 ящиков больше, но и в этом случае один ящик оказался загруженным не полностью. Когда же всю продукцию разместили в ящики по 5 кг, то все ящики оказались загруженными полностью, но при этом понадобилось дополнительно еще 5 ящиков. Сколько килограммов весила продукция фермера? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x *кг* весила продукция фермера. Тогда $8(n-1) < x < 8n,$ $6(n+7) < x < 6(n+8),$

$5(n+13) = x, \Rightarrow \quad 8(n-1) < 5(n+13) < 8n, \quad 6(n+7) < 5(n+13) < 6(n+8),$

$\Rightarrow \quad 21\frac{2}{3} < n < 23, \quad n = 22, \quad x = 35 \cdot 5 = 175.$

Ответ: 175.

2. Решите уравнение $8\sin^4(\pi x) - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos(4\pi x)$. В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[-1;2]$. (5 баллов)

Решение. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получаем

$$8\sin^4(\pi x) - 1 + \cos(4\pi x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8\sin^4(\pi x) - 2\sin^2(2\pi x) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$(2\sin^2(\pi x) - 2\sin(\pi x)\cos(\pi x))(2\sin^2(\pi x) + 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\sin^2(\pi x)(\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(\pi x)(\cos(2\pi x)) = 0.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = 0, \\ \cos(2\pi x) = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \pi k,\ k \in Z, \\ 2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k,\ k \in Z, \\ x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2},\ n \in Z, \end{array}\right.$

тогда корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$, будут равны

-1, 1, 2, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25, 1.75. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9\sqrt{1-(2x+y)^2}$.

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений a, b, c. Тогда $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$. Поскольку все части неравенств положительны. то $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9\sqrt[3]{xyz \cdot \frac{1}{xyz}} = 9$. Выражение $9\sqrt{1-(2x+y)^2} \leq 9$ для всех возможных значений x и y. Исходное неравенство справедливо для всех положительных z и всех положительных x и y, для которых выполняется неравенство $1-(2x+y)^2 \geq 0$. Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (10; 5) в плоскости Oxy до прямой $2x+y=1$. Это расстояние в квадрате равно 115,2.

Ответ: 115,2.

4. В стране Ландия, разводящей элитную породу лошадей, ежегодно проводится фестиваль по проверке их резвости, в котором могут участвовать только однолетние, двухлетние, трехлетние и четырехлетние скакуны. За каждую лошадь, выполнившую норматив резвости, организаторы фестиваля выплачивают конезаводу, на котором выращена лошадь, фиксированную сумму денег: за однолетку – 1 ландрик, за двухлетку – 2 ландрика, за трехлетку – 3 ландрика и за четырехлетку – 4 ландрика. Каждый конезавод, участвующий в фестивале, выставляет на испытание ежегодно четырех новых лошадей (любого сочетания возрастов по своему желанию), ранее не участвовавших в испытаниях, а также персонально всех лошадей (не старше четырех лет), которые ранее в более молодом возрасте участвовали в испытаниях и выполняли норматив. Какую максимальную сумму денег может заработать конезавод за первые шесть лет своего участия в фестивале? (12 баллов)

Решение. Четырехлетний скакун максимально может заработать за все время участия в фестивалях только 4 ландрика. Если скакун начинает участвовать в фестивалях с 1 года, то он имеет право участия еще 3 года после этого. В случае ежегодной победы, он в течение 4 лет заработает 1+2+3+4=10 ландрика. Если скакун начнет участвовать в фестивалях с 2 лет, то в течение 3 возможных для него лет участия он заработает максимально 2+3+4=9 ландрика. Если скакун начнет участвовать в фестивалях с 3 лет, то максимально может заработать 3+4=7 ландриков. Таким образом, наиболее оптимальная стратегия такова. В первый год завод выставляет 4 однолетних скакуна. Максимальный выигрыш составляет 4 ландрика. Во второй год завод выставляет 4 новых однолетних скакуна и 4 двухлетних, которые участвовали и победили в первый год. Максимальный выигрыш составит $4+4\cdot 2=12$ ландрика. В третий год завод выставляет 4 новых однолетних скакуна, 4 двухлетних, которые участвовали во второй год и 4 трехлетних, которые участвовали в предыдущие 2 года. Максимальный бонус $4+4\cdot 2+4\cdot 3=24$ ландрика. В четвертый год нет смысла

выставлять однолетних скакунов, поскольку они смогут после этого участвовать всего 2 года. Поэтому стоит выставить 4 новых двулетних скакуна. Выигрыш составит $4\cdot 2+4\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4=44$ ландрика. Скакуны, которые начинают участвовать на 5 год, после этого выступят всего раз, поэтому есть смысл выставлять новыми трехлетних. Выигрыш составит $4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot 4=52$ ландрика. На шестой год новыми стоит выставлять только четырехлеток. Выигрыш составит $4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4=64$ ландрика. Итого за 6 лет участия в фестивалях завод максимально может заработать 4+12+24+44+52+64=200 ландриков.

Ответ: 200.

5. Число N записано в виде произведения последовательных натуральных чисел от 2019 до 4036: $N=2019\cdot 2020\cdot 2021\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4035\cdot 4036$. Определите, в какой степени будет стоять двойка в разложении числа N на простые множители. (12 баллов)

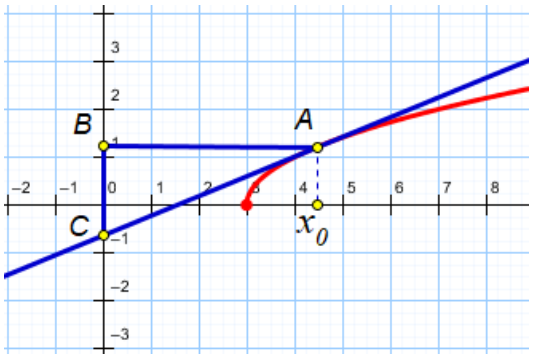
Решение. Число N можно представить в виде

$$N=\frac{(2\cdot 2018)!}{2018!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4035\cdot 4036}{2018!}=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4034\cdot 4036)}{2018!}=$$
$$=\frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2017\cdot 2018)}{2018!}=(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4035)\cdot 2^{2018}$$

Получили произведение нечетных чисел и степень двойки.

Ответ: 2018.

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y=\sqrt{x-3}$, катет – на оси y, а одна из вершин совпадает с точкой касания? (12 баллов)



Решение. $f(x)=\sqrt{x-3}$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC$, x_0 - абсцисса точки касания A,

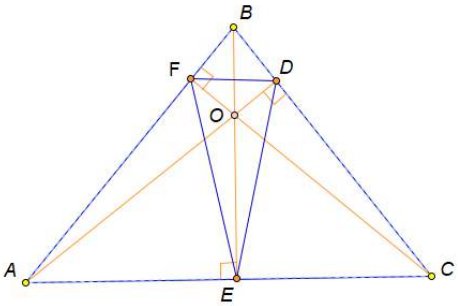
$A(x_0, f(x_0))$, $B(0, f(x_0))$, C - точка пересечения касательной с осью y. Пусть $C(0,c)$. Уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{x-3}$ имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Точка C принадлежит касательной, ее координаты подставляем в уравнение касательной: $c=-f'(x_0)x_0+f(x_0)$.

Тогда $AB = x_0$, $BC = f(x_0) - c = f'(x_0)x_0$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}f'(x_0)(x_0)^2 = \frac{{x_0}^2}{2\sqrt{x_0 - 3}}$. Для поиска экстремумов функции $S_{ABC} = S(x_0) = \frac{{x_0}^2}{4\sqrt{x_0 - 3}}$ находим нули производной этой функции $S'(x_0) = \frac{3({x_0}^2 - 4x_0)}{8\sqrt{(x_0 - 3)^3}}$. Поскольку $x_0 \geq 3$, то единственной точкой экстремума, а именно, точкой минимума для этой функции является точка $x_0 = 4$, $S_{\min} = S(4) = \frac{4^2}{4\sqrt{4-3}} = 4$.

Ответ: 4.

7. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD*, *BE*, *CF*. Длина стороны *AC* равна $1 + \sqrt{3}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник *DEF* окружности до точек *A* и *C* равны $\sqrt{2}$ и 2, соответственно. Найдите длину стороны *AB*. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $AO = \sqrt{2}, CO = 2$. Пусть $OE = x, AE = y$. Тогда приходим к системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ (1 + \sqrt{3} - y)^2 + x^2 = 4. \end{cases}$ Решая систему получаем $y = 1, x = 1$. Тогда $\angle DAC = \angle BCA = 45°$, $BC = \sqrt{6}$, $\angle FCA = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$, $\angle ABE = 30°$, $AB = 2$.



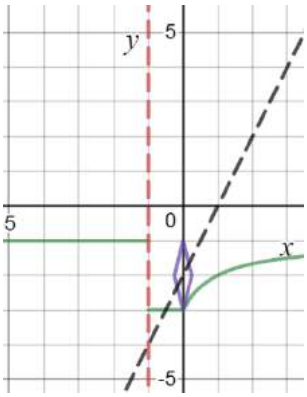
Ответ: 2.

8. Найдите все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} y = \frac{|x| - 1}{|x + 1|} - 2, \\ 4|x - 1,5 - a| + |y - 1 - 2a| = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра *a*. (16 баллов)

Решение. Построим графики функций:



а) $y=\dfrac{|x|-1}{|x+1|}-2=\begin{cases}-1, & \text{при } x<-1,\\ -3, & \text{при } -1<x\le 0,\\ \dfrac{x-1}{x+1}-2=\dfrac{-x-3}{x+1}=-1-\dfrac{2}{x+1}, & x\ge 0,\end{cases}$

б) $4|x-1{,}5-a|+|y-1-2a|=1$ - ромб, центр которого перемещается по прямой $y=2x-2$.

Общие точки графиков есть только при $-1<x\le 0$ – при этом только одно пересечение получаем в точке (0, -3), $a=-1{,}5$.

Ответ: -1.5.

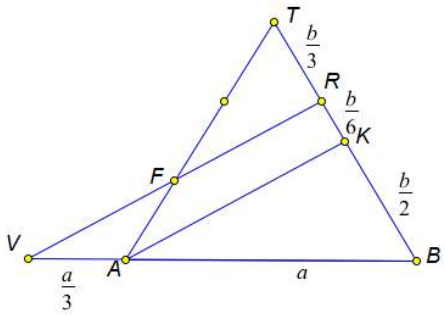
9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки C до этой плоскости сечения, a – сторона основания пирамиды $TABCD$, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды.

1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

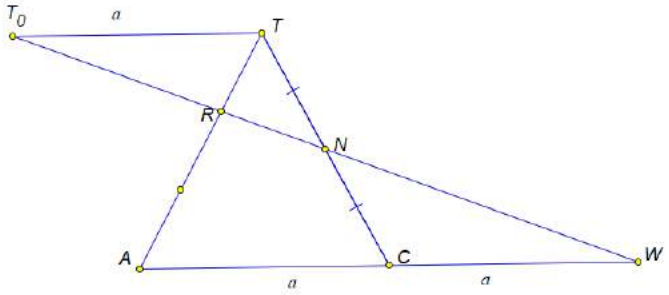
1) R – точка пересечения плоскости сечения α с BT

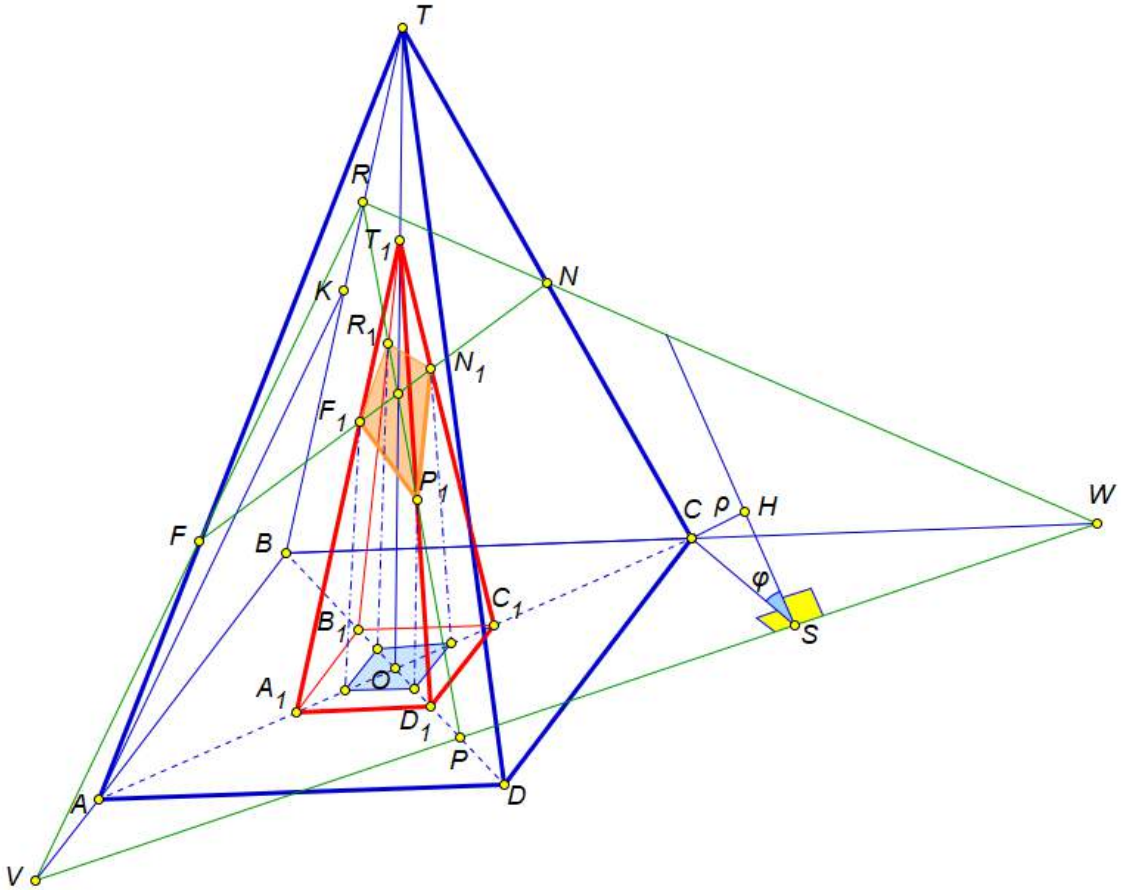
$FR \parallel AK$, $TB=b$, $TR:RB=1:2$, $VA=a/3$



2) W – точка пересечения плоскости сечения α с BC

$TN = b/2$, $BC : CW = 1:1$, $CW = a$.



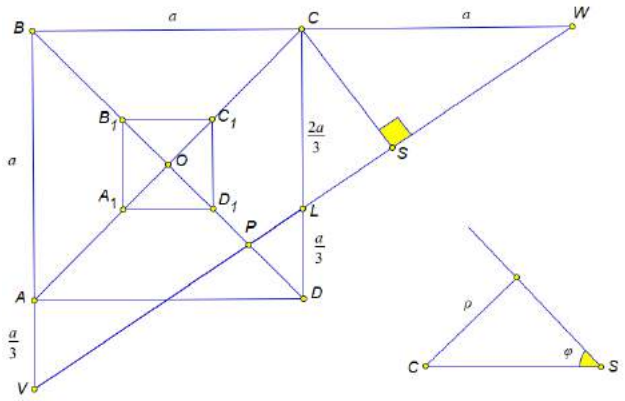


3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания)

$BP : PD = 4:1$, $PD = \frac{1}{5} BD = \frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$D_1P = \frac{2}{15} BD = \frac{2\sqrt{2}}{15} a.$

4) $\sin\varphi = \frac{\rho}{CS}$, $CS = \frac{2a}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}{2a}$.



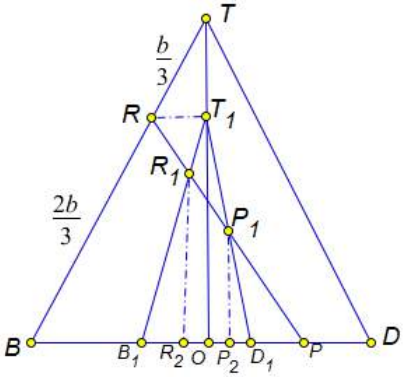
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

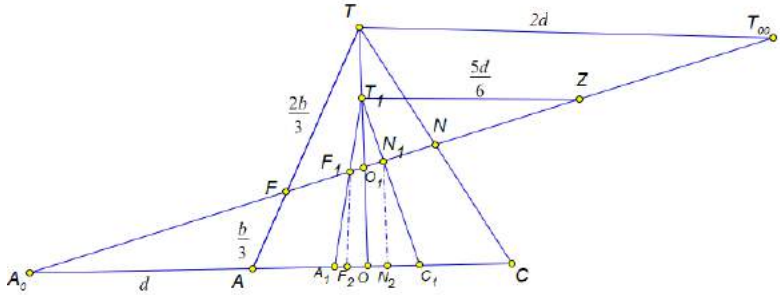
$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{6}BD,\ B_1P=\frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1}=\frac{5}{19}.$$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\frac{OR_2}{OB_1}=\frac{5}{19},\quad OR_2=\frac{5}{19}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}.$

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{RT_1}{D_1P},\quad \frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{5}{4},\quad \frac{T_1P_1}{T_1D_1}=\frac{5}{9},$

$\frac{OP_2}{OD_1}=\frac{5}{9},\quad OP_2=\frac{5}{9}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}.\quad R_2P_2=\frac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}.$





$TT_{00}\|A_0A,\quad A_0A=d,\quad TT_{00}=2d,\ A_0C=TT_{00}=2d,\quad AC=d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\frac{OO_1}{TO_1}=\frac{3}{4},\quad TO_1=\frac{4}{7}TO,\quad T_1O_1=\frac{5}{21}TO.$

$T_1Z\|\ A_0A,\ \frac{A_0O}{T_1Z}=\frac{OO_1}{T_1O_1}=\frac{9}{5},\quad T_1Z=\frac{5}{6}d.\quad \frac{T_1F_1}{A_1F_1}=\frac{T_1Z}{A_0A_1}=\frac{5}{8},\quad \frac{T_1F_1}{T_1A_1}=\frac{5}{13}.\ \frac{T_1N_1}{C_1N_1}=\frac{T_1Z}{A_0C_1}=\frac{1}{2},\quad \frac{T_1N_1}{T_1C_1}=\frac{1}{3}.$

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\frac{OF_2}{OA_1}=\frac{5}{13},\quad OF_2=\frac{5}{13}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{13\cdot 6}.$

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\frac{ON_2}{OC_1}=\frac{1}{3},\quad ON_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{\sqrt{2}a}{3\cdot 6}.$

$F_2N_2=\frac{14\sqrt{2}a}{9\cdot 13}.$

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi}=\frac{F_2N_2\cdot R_2P_2}{2\cos\varphi}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}.$$

$$a=9/2,\ \rho=4\sqrt{\frac{2}{13}},\quad S_{сеч}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}=\frac{105}{247}\approx 0,43.$$

Ответ: 0,43.

Решения заданий варианта № 2

1. Сосуд емкостью 10 л наполнен воздухом, содержащим 24% кислорода. Из сосуда откачали некоторый объем воздуха и добавили такой же объем аргона, после чего откачали такой же, как в первый раз, объем смеси и опять дополнили таким же объемом аргона. В новой смеси оказалось 11,76% кислорода. Сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x *л* смеси выпускалось каждый раз их сосуда. Тогда в первый раз кислорода в сосуде осталось $2,4-0,24x$. Процентное содержание кислорода в смеси после добавления аргона составило $(2,4-0,24x)10$. Второй раз кислорода в сосуде осталось $2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x$. Процентное содержание кислорода в этом случае в смеси после добавления аргона составило $10(2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x)$. По условию $10(2,4-0,24x-(2,4-0,24x)0,1x)=11,76$. Решая уравнение, приходим к квадратному уравнению $x^2-20x+51=0,\ x_1=3,\ x_2=17$. Второй корень не подходит по условию.

Ответ: 3.

2. Решите уравнение $\cos(\pi x^2)-\cos^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)+1+\cos(\pi x^2-4\pi x)=\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. В ответе укажите третий член возрастающей последовательности всех положительных корней уравнения.

(5 баллов)

Решение. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos(\pi x^2)+\cos(\pi x^2-4\pi x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cos(\pi x^2-2\pi x)\cos(2\pi x)=0.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}\cos(\pi x^2-2\pi x)=0,\\ \cos(2\pi x)=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x^2-2\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ 2\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x-\frac{1}{2}+k=0,\ k\in Z,\\ x=\frac{1}{4}+\frac{n}{2},\ n\in Z,\end{array}\right.$

Решая первое уравнение, получим $x=1\pm\sqrt{k+3/2}$, и тогда последовательность положительных корней уравнения будет такова:

0.25; $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 0.75; 1,25; $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$; 1,5 ; $1+\sqrt{1/2}$, ...

Ответ: 0.75

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 4{,}5\sqrt[4]{1-(2y+x)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений a, b, c. Тогда $((x+y)+(y+z)+(z+x)) \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$, $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$. Поскольку все части неравенств положительны. то $(2x+2y+2z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 9\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)\cdot\frac{1}{(x+y)(y+x)(z+x)}} = 9.$ Выражение $4{,}5\sqrt{1-(2y+x)^2} \leq 4{,}5$ для всех возможных значений x и y. Исходное неравенство справедливо для всех положительных z и всех положительных x и y, для которых выполняется неравенство $1-(2y+x)^2 \geq 0$. Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (5; 10) в плоскости Oxy до прямой $2y+x=1$. Это расстояние в квадрате равно 115,2.

Ответ: 115,2.

4. Сколькими способами прямоугольную доску размера 2×18 можно покрыть одинаковыми прямоугольными плитками размера 1×2? Плитки должны быть уложены так, чтобы они целиком помещались на доске и не перекрывались. (12 баллов)

Решение. Пусть имеется доска размером $2\times n$. Обозначим количество способов укладки плитками размера 1×2 через P_n. Тогда верна следующая рекуррентная формула $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$. Поскольку $P_1 = 1, P_2 = 2,$ проводя последовательные вычисления по рекуррентной формуле приходим к ответу $P_{18} = 4181.$

Ответ: 4181.

5. Определите наименьшее натуральное число N, среди делителей которого имеются все числа вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $6xy-y^2-5x^2=7$. (12 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение, разложив правую часть на множители

$$6xy-y^2-5x^2-x^2+x^2=7 \Rightarrow 6x(y-x)-(y+x)(y-x)=7 \Rightarrow (y-x)(6x-y-x)=7 \Rightarrow$$
$$(y-x)(5x-y)=7.$$

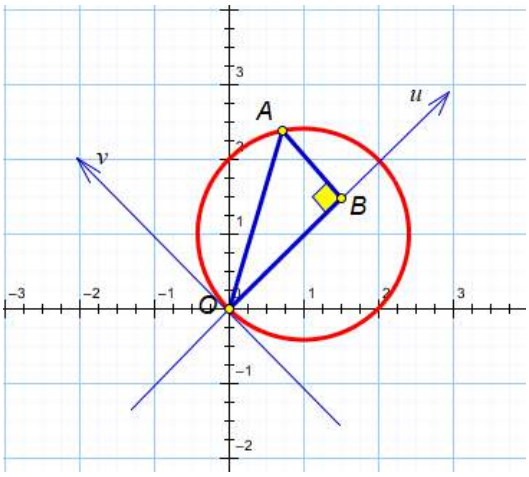
Учитывая, что переменные являются натуральными числами, а 7 – простое число, получим

$$\begin{cases} y-x=7, \\ 5x-y=1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=-7, \\ 5x-y=-1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=1, \\ 5x-y=7, \end{cases} \text{или} \begin{cases} y-x=-1, \\ 5x-y=-7, \end{cases}$$

вторая и четвертая системы не имеют натуральных решений. Решением первой системы является пара (2; 9), третьей – (2; 3). Значит, $x+y=11$ или $x+y=5$. И наименьшим натуральным числом, среди делителей которого имеются 5 и 11, является 55.

Ответ: 55.

6. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $x^2+y^2=2(x+y)$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y=x$? В ответ запишите квадрат найденной площади. (12 баллов)



Решение. $x^2+y^2-2x-2y=0, \quad (x-1)^2+(y-1)^2=2.$

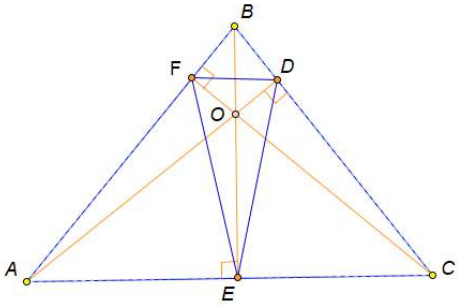
Имеем уравнение окружности с центром в точке (1; 1) и радиусом $R=\sqrt{2}$. Перейдем к системе координат Ouv с сохранением масштаба (см. рис.). Уравнение окружности в этой системе координат $(u-\sqrt{2})^2+v^2=2$. Площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на окружности, а вершина прямого угла расположена на прямой $v=0$, вычисляется по формуле $S_{OAB}=\frac{1}{2}u\cdot|v|=\frac{1}{2}u\sqrt{2\sqrt{2}u-u^2}$, где вершина $A(u,v)$ лежит на окружности, вершина прямого угла $B(u,0)$. Имеем $S^2=\frac{1}{4}(2\sqrt{2}u^3-u^4)$. Находим нули производной этой функции $\left(S^2\right)'(u)=\frac{u^2}{2}(3\sqrt{2}-2u)$. Единственной точкой экстремума, а именно, точкой максимума для этой функции является точка $u=3\sqrt{2}/2$,

$S_{\max}=S(3/\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad S^2_{\max}==\frac{27}{16}=1{,}6875,$

Ответ: 1,6875.

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны AC равна $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек A и C равны 2 и $2\sqrt{2}$, соответственно. Найдите радиус описанной около треугольника DEF окружности. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $AO=2, CO=2\sqrt{2}$. Пусть $OE=x, AE=y$. Тогда приходим к системе $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (\sqrt{2}+\sqrt{6}-y)^2+x^2=8. \end{cases}$ Решая систему получаем $y=\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$. Тогда $\angle DAC=\angle BCA=45°$, $BC=2\sqrt{3}$, $\angle FCA=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=30°$, $\angle ABE=30°$, $AB=2\sqrt{2}$.



$\angle DFE=90°, DE=AB\cos 45°=2$. $R_{оп.}=DE/2=1$.

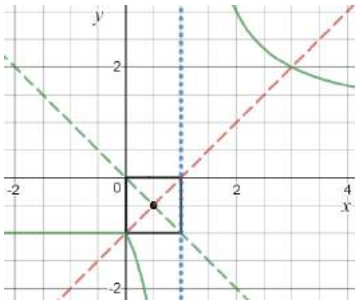
Ответ: 1.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y|+|x-y-2a|=1. \end{cases}$ имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

Решение. Решим данную систему уравнений графически.

Построим графики функций а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}$ и б) $|x+y|+|x-y-2a|=1$.



а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}, & \text{при } x\ge 0, \\ \dfrac{x+1}{-x-1}=-1, & \text{при } x<0. \end{cases}$

б) $|x+y|+|x-y-2a|=1$ - квадрат со стороной, длина которого равна 1, центр движется по прямой $y=-x$.

Общих точки у квадрата и правой части первого графика при x>1 нет. С левой ветвью единственная общая точка (0, -1). При этом значение параметра a можно получить, подставив координаты общей точки во второе уравнение системы: $|-1|+|1-2a|=1 \Rightarrow a=1/2$.

2 способ. Рассмотрим $x<0$, при этом $y=-1$. Заметим, что в данной задаче $|x+y|\le 1$ всегда, что следует из второго уравнения. Подставим $y=-1$. Получим $|x-1|\le 1 \Rightarrow -1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2$, что невозможно в силу отрицательности *x*.

Рассмотрим $x\ge 0$. При этом $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$. Подставив в первый модуль второго уравнения, получим $-1\le x+1+\dfrac{2}{x-1}\le 1, \Rightarrow -2\le \dfrac{x^2-x+2}{x-1}\le 0.$ Числитель дроби всегда положителен, следовательно дробь меньше нуля может быть только при $x<1$.

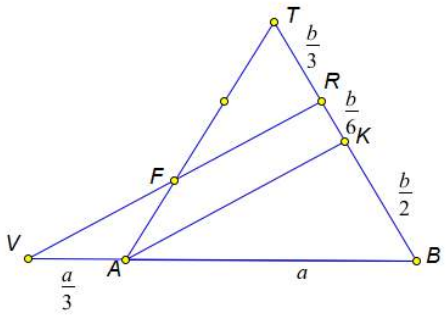
Тогда $\begin{cases}0\le x<1,\\ -2\le \dfrac{x^2-x+2}{x-1},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le x<1,\\ 0\le \dfrac{x^2-x+2+2x-2}{x-1},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le x<1,\\ 0\le \dfrac{x^2+x}{x-1},\end{cases} \Rightarrow x=0.$

При этом $y=-1$, подставив координаты точки во второе уравнение системы, находим параметр: $|-1|+|1-2a|=1 \Rightarrow a=1/2.$

Ответ: $0,5$.

9. Дана правильная четырехугольная пирамида *TABCD* с основанием *ABCD*, причем *AB* = 9/2. На ее высоте *TO* выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки *OA, OB, OC* и *OD*, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки *O*. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане *AK* боковой грани *TAB*, проходящей через середину ребра *TC* и точку *F* отрезка *TA* такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки *B* до этой плоскости сечения равно $8\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки *C* до этой плоскости сечения, *a* – сторона основания пирамиды *TABCD*, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды. Отметим, что расстояние от точки *B* до плоскости α равно $2\rho,\quad \rho=4\sqrt{\dfrac{5}{13}}.$



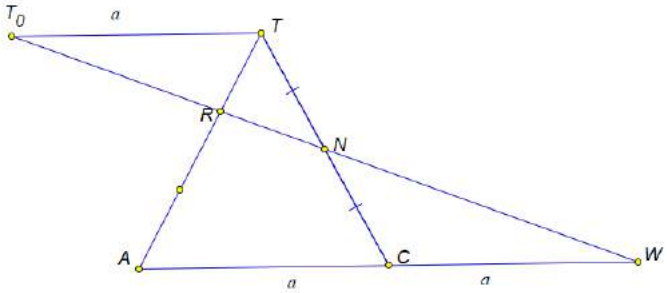
1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

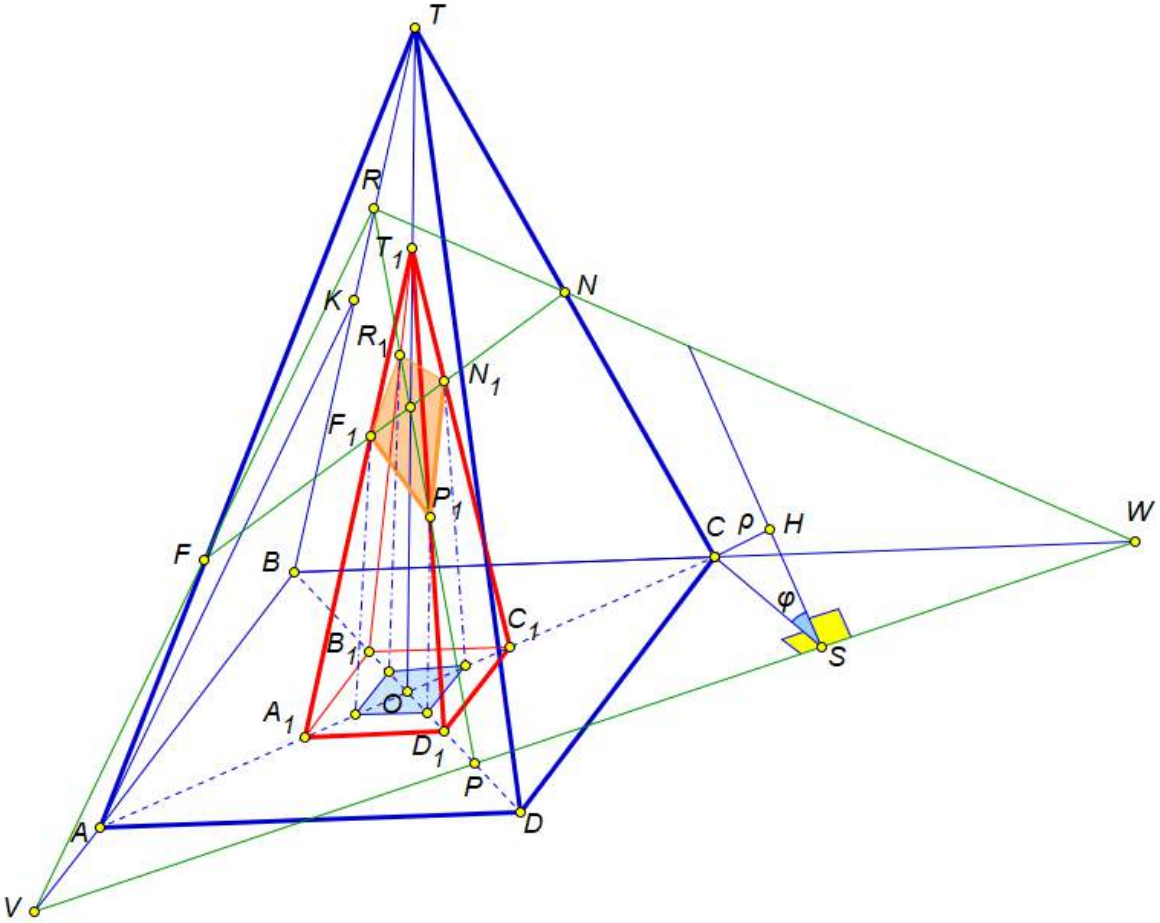
1) *R* – точка пересечения плоскости сечения α с *BT*

$FR\|AK,\ TB=b,\ TR:RB=1:2, VA=a/3$

2) W – точка пересечения плоскости сечения α с BC

$TN = b/2$, $BC : CW = 1:1$, $CW = a$.



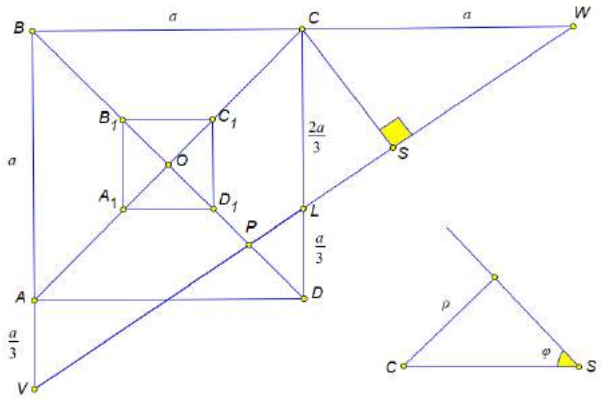


3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания)

$BP : PD = 4:1$, $PD = \frac{1}{5} BD = \frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$D_1P = \frac{2}{15} BD = \frac{2\sqrt{2}}{15} a.$

4) $\sin\varphi = \frac{\rho}{CS}$, $CS = \frac{2a}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4a^2 - 13\rho^2}}{2a}$.



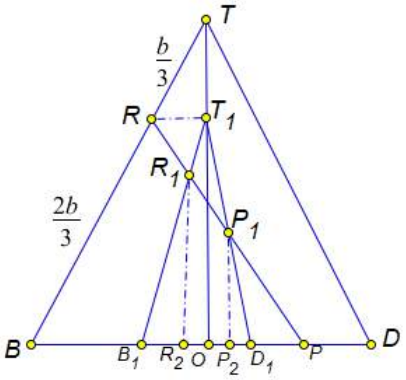
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

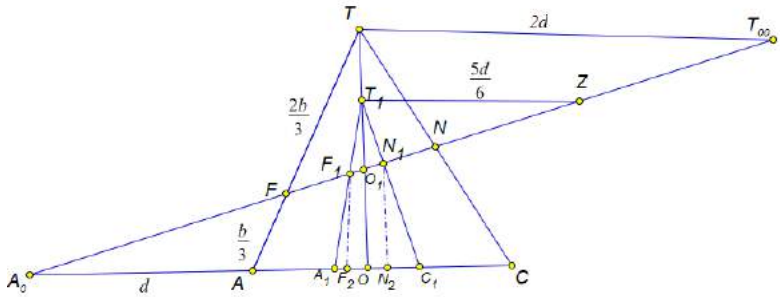
$$\frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{6}BD,\ B_1P=\frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1}=\frac{5}{19}.$$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\frac{OR_2}{OB_1}=\frac{5}{19}$, $OR_2=\frac{5}{19}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}$.

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{RT_1}{D_1P}$, $\frac{T_1P_1}{P_1D_1}=\frac{5}{4}$, $\frac{T_1P_1}{T_1D_1}=\frac{5}{9}$,

$\frac{OP_2}{OD_1}=\frac{5}{9}$, $OP_2=\frac{5}{9}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}$. $R_2P_2=\frac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}$.





$TT_{00}\|A_0A$, $A_0A=d$, $TT_{00}=2d$, $A_0C=TT_{00}=2d$, $AC=d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\frac{OO_1}{TO_1}=\frac{3}{4}$, $TO_1=\frac{4}{7}TO$, $T_1O_1=\frac{5}{21}TO$.

$T_1Z\|A_0A$, $\frac{A_0O}{T_1Z}=\frac{OO_1}{T_1O_1}=\frac{9}{5}$, $T_1Z=\frac{5}{6}d$. $\frac{T_1F_1}{A_1F_1}=\frac{T_1Z}{A_0A_1}=\frac{5}{8}$, $\frac{T_1F_1}{T_1A_1}=\frac{5}{13}$. $\frac{T_1N_1}{C_1N_1}=\frac{T_1Z}{A_0C_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{T_1N_1}{T_1C_1}=\frac{1}{3}$.

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\frac{OF_2}{OA_1}=\frac{5}{13}$, $OF_2=\frac{5}{13}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{5\sqrt{2}a}{13\cdot 6}$.

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\frac{ON_2}{OC_1}=\frac{1}{3}$, $ON_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{BD}{6}=\frac{\sqrt{2}a}{3\cdot 6}$.

$F_2N_2=\frac{14\sqrt{2}a}{9\cdot 13}$.

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi}=\frac{F_2N_2\cdot R_2P_2}{2\cos\varphi}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}.$$

$$a=9/2,\ \rho=4\sqrt{\frac{5}{13}},\quad S_{сеч}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}=\frac{735}{247}\approx 2{,}98.$$

Ответ: 2,98.

Решения заданий варианта № 3

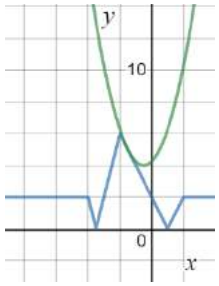
1. Из пункта *A* круговой трассы одновременно и в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль проехал два круга без остановок в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно и увеличил скорость на 16 *км/ч*, через 3/8 *ч* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт *A*. Найдите весь путь (в *км*) мотоциклиста, если этот путь на 5,25 *км* короче всего шоссе. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть *x (км/ч)* – скорость мотоциклиста, *x (км/ч)* – скорость автомобиля, *S (км)* – путь мотоциклиста до разворота, тогда длина всей трассы $2S+5,25$. Имеем $\frac{S}{x}=\frac{3S+5,25}{y}$, $\frac{3x}{8}+6=S$, $\frac{3y}{8}=S+5,25$. Приходим к квадратному уравнению $4S^2-36S-63=0$, его положительное решение $S=10,5$, весь путь мотоциклиста $2S=21$.

Ответ: 21.

2. Решите уравнение $\left|2|x-1|-3|x+2|+2|x+4|-|x-2|\right|=x^2+x+4,25$. В ответ запишите сумму корней уравнения. (5 баллов)

Решение. Если модули раскрываются с одинаковыми знаками, т.е. при $-4\le x$ или $x\ge 2$ левая часть постоянна и равна 2. Максимальные значения будут приниматься на отрезке $-2\le x\le 1$. Минимальное значение функции, стоящей в правой части, достигается в вершине параболы, в точке $x=-1/2$. Раскроем модули при $-2\le x\le 1$



$$\left|-2x+2-3x-6+2x+8+x-2\right|=x^2+x+4.25$$

$$2-2x=x^2+x+4.25 \;\Rightarrow\; x^2+3x+2.25=0 \;\Rightarrow x=-1.5$$

Ответ: -1,5.

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\ge 9\sqrt{1-(2z+y)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

Решение. Используем неравенство Коши $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$, которое выполняется для всех положительных значений *a, b, c*. Тогда $x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$.

Поскольку все части неравенств положительны. то $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\geq 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2\cdot\frac{1}{x^2y^2z^2}}=9.$ Выражение $9\sqrt{1-(2z+y)^2}\leq 9$ для всех возможных значений z и y. Исходное неравенство справедливо для всех положительных x и всех положительных z и y, для которых выполняется неравенство $1-(2z+y)^2\geq 0$. Таким образом, наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют исходному неравенству, равно расстоянию от точки (3; 6) в плоскости Oyz до прямой $2z+y=1$. Это расстояние в квадрате равно 39,2.

Ответ: 39,2.

4. Даны 2019 неразличимых по виду монет. Все монеты имеют одинаковую массу, за исключением одной, более легкой. За какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно найти более легкую монету при помощи чашечных весов без гирь? (12 баллов)

Решение. Индукцией по k докажем следующее утверждение: если даны N одинаковых по виду монет, причем $3^{k-1}<N\leq 3^k$, из которых одна более легкая, то ее можно найти за k взвешиваний. База индукции: $k=0, N=1,$ одну монету взвешивать не надо. Шаг индукции: пусть для 0, 1, 2, …, k доказано. Пусть теперь $3^k<N\leq 3^{k+1}$. Положим на левую чашу весов не менее $N/3$ монет, но не более 3^k монет, и на правую столько же. Если левая чаша легче, если левая чаша легче, то легкая монета на ней, если правая – то на ней, а если весы уравновешены, то более легкая монета находится среди оставшихся, число которых меньше или равно $N/3\leq 3^k$. В результате, нам останется искать более легкую монету среди не более 3^k монет, и потребуется еще не более k взвешиваний. Поскольку $3^6<2019\leq 3^7$, то число взвешиваний k равно 7.

Ответ: 7.

5. Найдите сумму всех чисел вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $5x+17y=307$. (12 баллов)

Решение. Решаем вспомогательное уравнение $5x+17y=1$. Его решениями, например, могут быть 7 и 2. Домножим их на 307, и учтем линейные комбинации при целом t, получаем значения в натуральных числах

$$\begin{cases} x=7\cdot 307-17t, \\ y=-2\cdot 307+5t, \end{cases} t\in Z,\ x>0,\ y>0\Rightarrow t\in\{123,124,125,126\}\Rightarrow$$

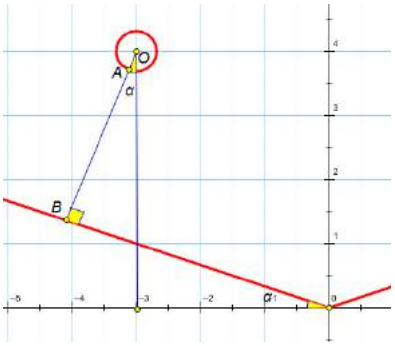
$(58,1)$, $(41,6)$, $(24,11)$, $(7,16)$

$59+47+35+23=164$

Ответ: 164.

6. Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB, если точка A принадлежит кривой $10(x^2+y^2)+60x-80y+249=0$, а точка B — графику функции $y=\frac{1}{3}|x|$? В ответ запишите квадрат найденной длины. (12 баллов)

Решение. Кривая $10(x+3)^2+10(y-4)^2=1$ есть окружность с радиусом $R = 1/\sqrt{10}$ и центром в точке $O(-3;4)$. OB — отрезок перпендикуляра из точки O к прямой $y=-x/3$. Точка A — точка пересечения OB с окружностью. Наименьшая длина и есть длина отрезка AB. Угол α — угол наклона прямой $y = x/3$ к оси x. Тогда $OB = 3\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = 1/3 \Rightarrow \cos\alpha = 3/\sqrt{10}$. Отсюда $OB = 9/\sqrt{10} \Rightarrow AB = 9/\sqrt{10}-1/\sqrt{10} = 8/\sqrt{10}$. $AB^2=6,4$.



Ответ: 6,4.

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны BC равна 6. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек B и C равны $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$, соответственно. Найдите высоту треугольника DEF, проведенную к стороне DE. (16 баллов)

Решение. AD, BE, CF - высоты треугольника ABC, DA, EB, FC биссектрисы углов D, E, F треугольника DEF, O - точка пересечения высот треугольника ABC, она же является центром вписанной в треугольник DEF окружности. Таким образом, $BO=3\sqrt{2}-\sqrt{6}, CO=2\sqrt{6}$. Пусть $OD=x, BD=y$. Тогда приходим к системе

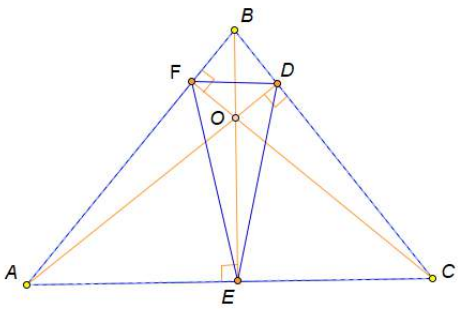
$$\begin{cases} x^2+y^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2, \\ (6-y)^2+x^2=24. \end{cases}$$

Решая систему получаем $y=3-\sqrt{3}, x=3-\sqrt{3}$. Тогда $\angle EBC=\angle BCA=45°$,

$EC=3\sqrt{2}$, $\angle FCA=\arccos\frac{OE}{OC}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=30°$,

$\angle ABE=30°$, $\angle DFE=90°$, $FE=BC\cos 60°=3$.

$\angle FED=30°$, $h=FE\sin 30°=1,5$.



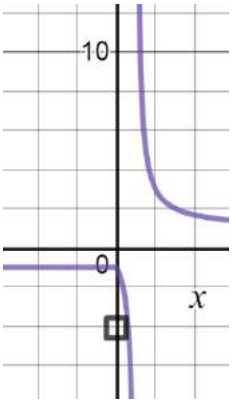
Ответ: 1,5.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y+a|+|x-y-a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

Решение. Решим данную систему уравнений графически.



Построим графики функций а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}$ и б) $|x+y+a|+|x-y-a|=1$.

а) $y=\dfrac{x+1}{|x|-1}=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}, & \text{при } x\ge 0, \\ \dfrac{x+1}{-x-1}=-1, & \text{при } x<0. \end{cases}$

б) $|x+y+a|+|x-y-a|=1$ - квадрат со стороной, длина которого равна 1, центр движется по прямой $x=0$.

Общих точки у квадрата и правой части первого графика при x>1 нет, т.к. в данной задаче $|x|\le 1/2$ всегда, что следует из второго уравнения. С левой ветвью при $y>-1$ нет пересечений,

Подставим $y=-1.$ $(x<0)$ Получим

$$|x-1+a|+|x+1-a|\le 1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\ge -1/2, \\ x\le 1/2, \end{array}\right. \text{ при } |2(1-a)|<1 \\ a-1\le x\le 1-a,\ |2(1-a)|=1 \text{, следовательно при } a=1/2 \text{ и } 3/2 \\ \text{нет решений,} \quad |2(1-a)|>1 \end{array}\right.$$

получаем в виде решения целый отрезок.

При $-3<y<-1$ два пересечения, при $y=-3$ единственная общая точка (0.5, -3).

При этом значение параметра a можно получить, подставив координаты общей точки во второе уравнение системы: $|-3+a|+|3-a|=1 \;\Rightarrow\; a=3+1/2=3.5$ (Второе значение 2.5 не подходит, т.к. при этом будет 2 решения.)

Ответ: $3{,}5.$

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем AB = 9/2. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что TT_1 = TO/3. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через

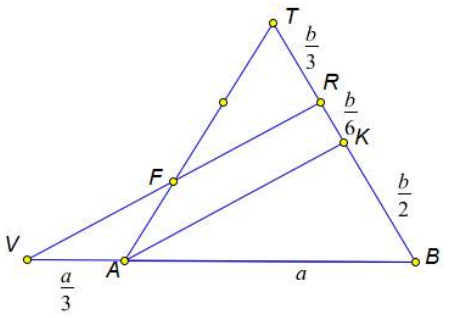
середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Решение. Пусть α - плоскость сечения, ρ - расстояние от точки C до этой плоскости сечения, a – сторона основания пирамиды $TABCD$, φ - угол между плоскостью сечения и основанием пирамиды. $\rho = 4\sqrt{\frac{5}{13}}$.

1. Построение сечения $T_1A_1B_1C_1D_1$

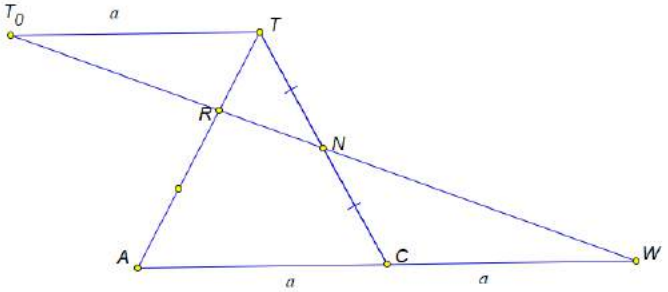
1) R – точка пересечения плоскости сечения α с BT

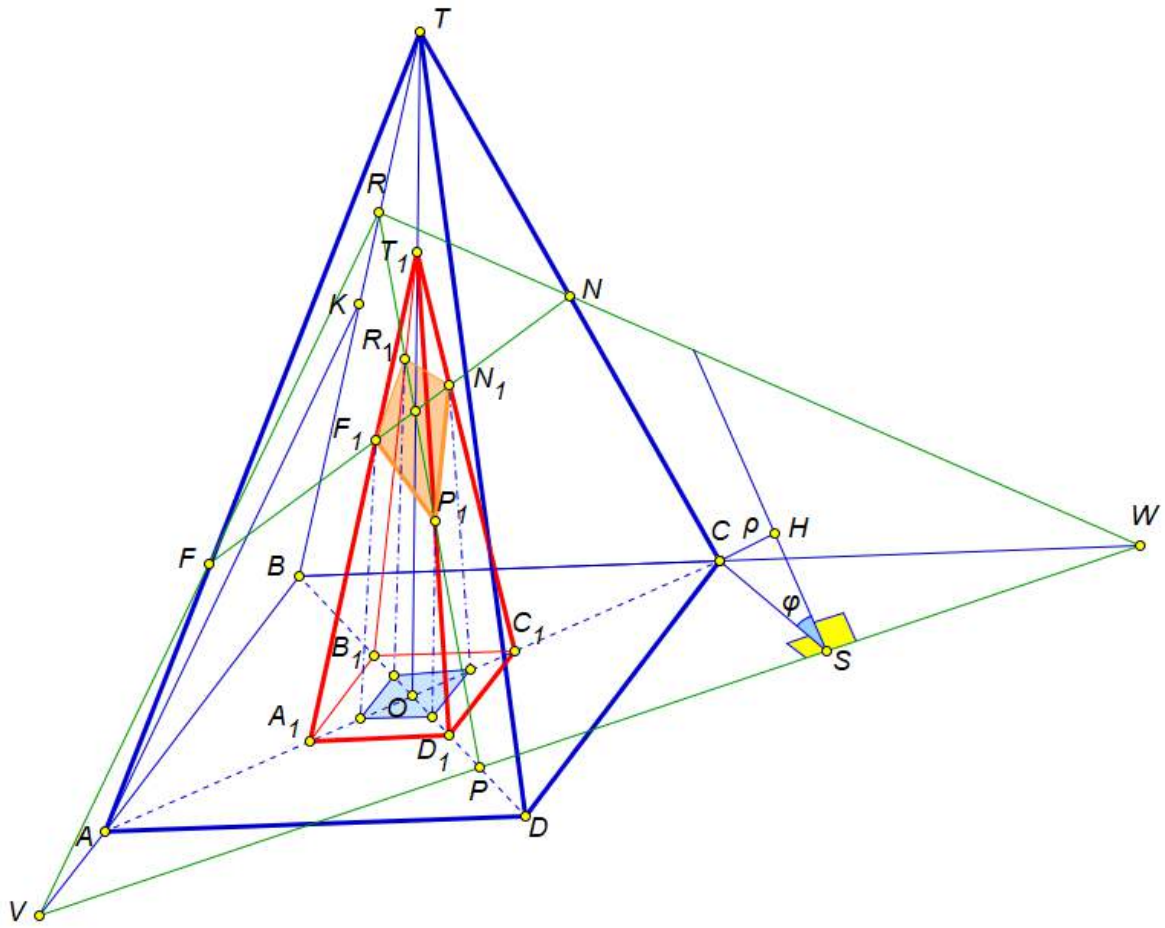
$FR \parallel AK,\ TB = b,\ TR:RB = 1:2, VA = a/3$



2) W – точка пересечения плоскости сечения α с BC

$TN = b/2,\ BC:CW = 1:1,\ CW = a.$

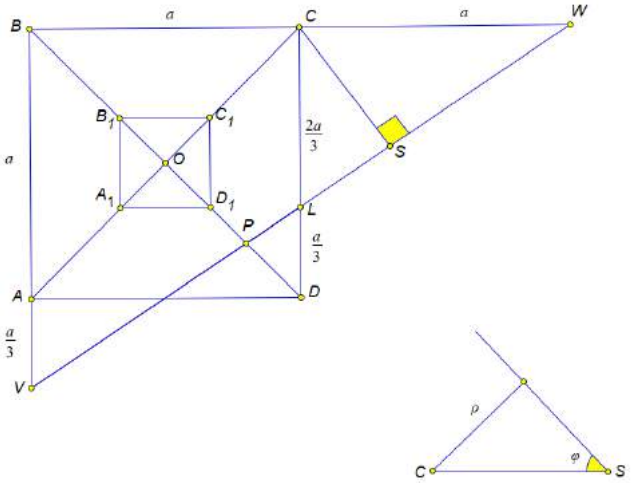




3) P – точка пересечения BD с VW (прямая пересечения плоскости сечения с плоскостью основания) $BP:PD=4:1,\ PD=\frac{1}{5}BD=\frac{a\sqrt{2}}{5}$,

$D_1P=\frac{2}{15}BD=\frac{2\sqrt{2}}{15}a.$

4) $\sin\varphi=\frac{\rho}{CS},\quad CS=\frac{2a}{\sqrt{13}},\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{4a^2-13\rho^2}}{2a}.$



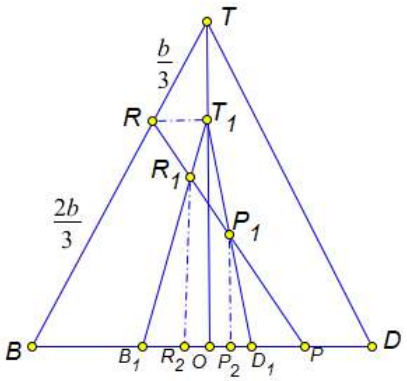
4) R_1 и P_1 – точки пересечения ребер T_1B_1 и T_1D_1 с плоскостью сечения α

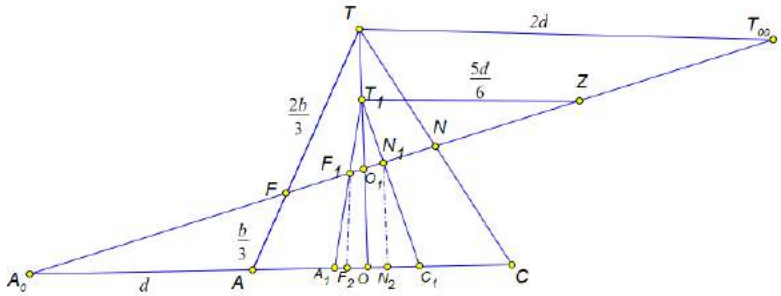
$\frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{RT_1}{B_1P},\ RT_1=\frac{1}{3}BO=\frac{1}{6}BD,\ B_1P=\frac{7}{15}BD,\ \frac{R_1T_1}{R_1B_1}=\frac{5}{14},\ \frac{R_1T_1}{T_1B_1}=\frac{5}{19}.$

R_2 - проекция R_1 на плоскость основания, $\dfrac{OR_2}{OB_1}=\dfrac{5}{19}$, $OR_2=\dfrac{5}{19}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{19\cdot 6}$.

P_2 - проекция P_1 на плоскость основания, $\dfrac{T_1P_1}{P_1D_1}=\dfrac{RT_1}{D_1P}$, $\dfrac{T_1P_1}{P_1D_1}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{T_1P_1}{T_1D_1}=\dfrac{5}{9}$,

$\dfrac{OP_2}{OD_1}=\dfrac{5}{9}$, $OP_2=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{9\cdot 6}$. $R_2P_2=\dfrac{70\sqrt{2}a}{19\cdot 27}$.





$TT_{00}\|A_0A$, $A_0A=d$, $TT_{00}=2d$, $A_0C=TT_{00}=2d$, $AC=d$.

O_1 - точка пересечения A_0T_{00} и TO, $\dfrac{OO_1}{TO_1}=\dfrac{3}{4}$, $TO_1=\dfrac{4}{7}TO$, $T_1O_1=\dfrac{5}{21}TO$.

$T_1Z\|A_0A$, $\dfrac{A_0O}{T_1Z}=\dfrac{OO_1}{T_1O_1}=\dfrac{9}{5}$, $T_1Z=\dfrac{5}{6}d$. $\dfrac{T_1F_1}{A_1F_1}=\dfrac{T_1Z}{A_0A_1}=\dfrac{5}{8}$, $\dfrac{T_1F_1}{T_1A_1}=\dfrac{5}{13}$. $\dfrac{T_1N_1}{C_1N_1}=\dfrac{T_1Z}{A_0C_1}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{T_1N_1}{T_1C_1}=\dfrac{1}{3}$.

F_2 - проекция F_1 на плоскость основания, $\dfrac{OF_2}{OA_1}=\dfrac{5}{13}$, $OF_2=\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}a}{13\cdot 6}$.

N_2 - проекция N_1 на плоскость основания, $\dfrac{ON_2}{OC_1}=\dfrac{1}{3}$, $ON_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{BD}{6}=\dfrac{\sqrt{2}a}{3\cdot 6}$.

$F_2N_2=\dfrac{14\sqrt{2}a}{9\cdot 13}$.

2. Площадь сечения $F_1R_1N_1P_1$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{S_{F_2R_2N_2P_2}}{\cos\varphi}=\frac{F_2N_2\cdot R_2P_2}{2\cos\varphi}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}.$$

$$a=9/2,\ \rho=4\sqrt{\frac{5}{13}},\quad S_{сеч}=\frac{3\cdot 49\cdot 5\cdot 8a^3}{9^3\cdot 13\cdot 19\sqrt{4a^2-13\rho^2}}=\frac{735}{247}\approx 2{,}98.$$

Ответ: 2,98.