Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2018 г.

10 класс

№1: Найдите наименьшее допустимое натуральное значение параметра a, при котором уравнение $ax-3=0$ имеет положительное решение.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\0\cdot x=3\end{cases}\\ \begin{cases}a\in R\setminus\{0\}\\x=\dfrac{3}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

, то есть $\frac{3}{a}>0$. Наименьшее значение a, при котором это справедливо это $a=1$.

Ответ: 1.

№2: Решите неравенство $\dfrac{(\sqrt{x-3}+\sqrt{-x^2+18x-45})\cdot(|x^2-14x+48|-|x-8|)}{|x+4|+|x-21|-|x+7|-|x-36|}\geq 0$. В ответ запишите сумму целых решений этого неравенства.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}x\geq 3\\-x^2+18x-45\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\(x-3)\cdot(x-15)\leq 0\end{cases}$

Окончательно, ОДЗ: $x\in[3;15]$. На ОДЗ ($x\in[3;15]$) $|x+4|=x+4$; $|x-21|=21-x$; $|x+7|=x+7$; $|x-36|=36-x$.

Тогда знаменатель $=x+4+21-x-x-7+x-36=-18$. $x^2-14x+48=(x-6)\cdot(x-8)$ и неравенство примет вид: $\dfrac{(\sqrt{x-3}+\sqrt{(x-3)\cdot(15-x)})\cdot(|x-8|\cdot|x-6|-|x-8|)}{-18}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ (\sqrt{x-3}+\sqrt{(x-3)\cdot(15-x)})\cdot|x-8|\cdot(|x-6|-1)\leq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \begin{cases}3\leq x\leq 15\\|x-8|\cdot((x-6)^2-1)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \begin{cases}3\leq x\leq 15\\|x-8|\cdot(x-5)\cdot(x-7)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\ x\in\{3\}\bigcup[5;7]\bigcup\{8\}.$$

3+5+6+7+8=29.

Ответ: 29.

№3: При каких значениях параметра a уравнение $(a+2)\cdot(x^2-6x+8)^2-2(a-1)\cdot(x^2-6x+8)+a-3=0$ имеет ровно два различных решения? В ответе укажите сумму целых значений a, удовлетворяющих условию задачи.

Решение. Сделаем замену $t=x^2-6x+8$ (1). Получим уравнение $(a+2)\cdot t^2-2(a-1)\cdot t+a-3=0$ (2). При этой замене $x_{вершины}=3$, $t_{вершины}=-1$. Областью значений переменной t будет луч $[-1;+\infty)$. Следовательно, при $t<-1$ уравнение $t=x^2-6x+8$ не будет иметь корней, $t=-1$ даст единственное значение x ($x=3$), а каждое $t>-1$ принесёт нам два различных корня. Следовательно, два решения по переменной x у нас может быть в одном из двух случаев: либо уравнение (2) имеет единственное решение большее -1 , либо уравнение (2) имеет два различных решения, одно из которых больше -1 (оно даст два решения по x), а другое – меньше -1, которое решений по x не даст. Первый случай возможен либо при $a=-2$ (тогда получится линейное уравнение $6t-5=0$ с корнем $t=\frac{5}{6}$

($\frac{5}{6}>-1$)), либо при выполнении условий $\begin{cases} D=0 \\ t_{вершины}>-1 \end{cases}$, которому соответствует наличие одного

корня, большего -1. Решим систему: $\begin{cases} 4\cdot(a-1)^2-4\cdot(a+2)\cdot(a-3)=0 \\ \dfrac{a-1}{a+2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-a=0 \\ \dfrac{2a+1}{a+2}>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $a=7$. Второй случай возможен при условии $\frac{f(-1)}{a+2}<0$, где $f(\mathrm{t})=(a+2)\cdot \mathrm{t}^2-2\cdot(a-1)\cdot t+a-3$. Решим последнее неравенство: $\frac{a+2+2(a-1)+a-3}{a+2}<0 \Leftrightarrow \frac{4a-3}{a+2}<0 \Leftrightarrow a\in(-2;\frac{3}{4})$. Таким образом, ответом задачи

будет $a\in[-2;\frac{3}{4})\bigcup\{7\}$. Посчитаем сумму целых значений a, удовлетворяющих условию задачи: $-2+(-1)+0+7=4$.

Ответ: 4.

№4: Решить уравнение $\frac{x-3}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-5}{x}+...+\frac{3}{x}=5$. В ответ записать наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трёх значащих цифр по правилам округления.

Решение: В левой части уравнения находится целое число дробей, числители которых представляют из себя арифметическую прогрессию и убывают от числа $(x-3)$ до числа 3 с разностью -1. Посчитаем количество дробей: $a_1 = x-3$, $a_n = 3 = a_1 + (n-1)d = x-3+(n-1)(-1)$, получаем, что количество дробей $n = x-5$. Сумма числителей равна сумме n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{x-3+3}{2} \cdot (x-5) = \frac{x \cdot (x-5)}{2}$.

Тогда уравнение принимает вид: $\frac{x \cdot (x-5)}{2 \cdot x} = 5$, решая его, получаем, что $x = 15$.

Ответ: 15.

№5: В связи с неблагоприятными погодными условиями фермер собрал зерна на 10 % меньше, чем в предыдущий год. Как изменится в процентах по сравнению с предыдущим годом его выручка от продажи зерна, если закупочная цена на зерно по сравнению с предыдущим годом повысилась на 15%. В ответе укажите количество процентов.

Решение:

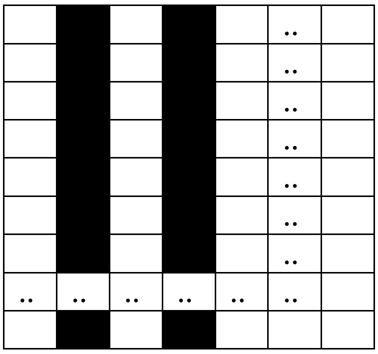
Пусть в прошлом году фермер собрал x тонн зерна. Тогда в этом году он собрал $0{,}9x$ тонн. Закупочная цена в прошлом году была y тыс.рублей. А в этом стала $1{,}15y$ тыс.рублей. Тогда выручка от продажи зерна в прошлом году составила yx тыс. рублей, а в этом году $1{,}15y \cdot 0{,}9x = 1{,}035yx$. Сравнивая выручки двух лет, получаем, что в этом году выручка составляет 1.035 от прошлого. То есть выросла на 3,5 процента.

Ответ: 3,5.

№6: Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35х35– всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых трех его клеток, образующих фигуру «уголок», обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо столбцами через один (см. рис.). Таким образом будет закрашено $N[\frac{N}{2}]$ клеток. Это минимально возможное количество. Действительно, в каждой полоске 2xN клеток должно быт не менее $2[\frac{N}{2}]$ закрашено. Поэтому в соседнем столбце рядом с неокрашенной обязательно есть закрашенная. (35*17=595).



Ответ: 595.

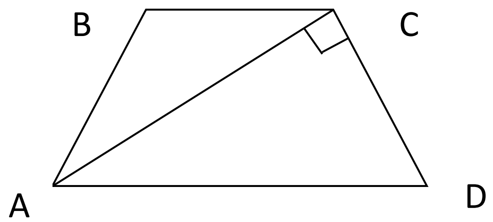
№7: Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Поскольку AB=BC (по условию), треугольник ABC равнобедренный. То есть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$.

Отсюда $\angle ABC = 180^0 - 2\alpha = \angle BCD =$

$90^0 + \angle ACB = = 90^0 + \alpha$.



Вычисляя, получим $\alpha = 30^0$.

Следовательно, $\angle ABC = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$.

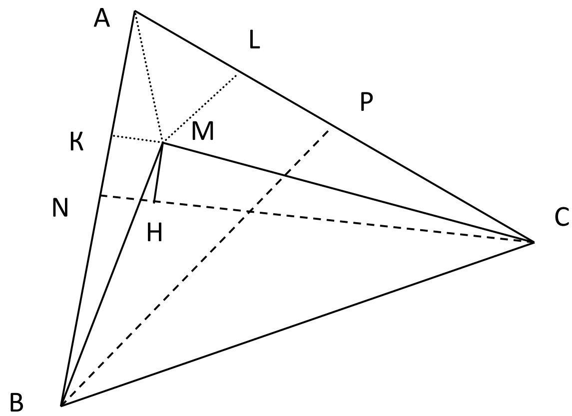
Ответ: 120.

№8: Внутри треугольника ABC выбрана точка M так, что угол BMC – прямой, а треугольник BMC равнобедренный. Расстояния от точки M до точки A, прямой AB и прямой AC равны $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, соответственно. Найдите квадрат длины стороны BC.

Решение.

Угол BAC – острый, т.к. $\angle$BMC=90^0. AB ││MH. Треугольник BKM равен треугольнику CHM по гипотенузе и острому углу (BM=MC, $\angle$MBK=$\angle$BMH=$\angle$MCH) следовательно, KMHN – квадрат.

Далее только Т.Пифагора.



$AK^2 = AM^2 - MK^2 = 10-2=8$.

$AL^2 = AM^2 - ML^2 = 10-5=5$.

Пусть, BC = x, BM = y, BN = z, PC = t.

$MB^2 = KB^2 + MK^2 = (KN+z)^2 + MK^2 = y^2$.

$MC^2 = LC^2 + ML^2 = (LP+t)^2 + ML^2 = y^2$.

Поэтому: $\left(\sqrt{2}+z\right)^2 + 2 = \left(\sqrt{5}+t\right)^2 + 5$. (1)

$PB^2 = CB^2 - PC^2 = AB^2 - AP^2$ или $x^2 - t^2 = \left(3\sqrt{2}+z\right)^2 - 20 => x^2 = z^2 + t^2 + 6\sqrt{2}z - 2$.

$CN^2 = CB^2 - BN^2 = AC^2 - AN^2$ или $x^2 - z^2 = \left(2\sqrt{5} + t\right)^2 - 18 \Rightarrow x^2 = z^2 + t^2 + 4\sqrt{5}t + 2$.

Таким образом: $z = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{5}t + 1\right)$. Из (1): $t^2 - 2\sqrt{5}t - 40 = 0$. ($t>0$) =>

$t = 4\sqrt{5}, z = 7\sqrt{2}, x^2 = 260$.

Ответ: 260.

№9: Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{x^2 + 6x + 9} = 7$. В ответ записать значение выражения $x_0^3 - 4x_0$, где x_0 – наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трёх значащих цифр по правилам округления.

Решение: Заметим, что левая часть уравнения представляем из себя сумму двух квадратов, добавим и отнимем удвоенное произведение и свернем слагаемые по формуле квадрат разности:

$$(x)^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 = 7$$

$$(x)^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} - 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} = 7$$

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} = 7$$

$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 7 = 0$, делаем замену $\frac{x^2}{x+3} = t$, решаем полученное уравнение, получаем, что $\frac{x^2}{x+3} = -7$ или $\frac{x^2}{x+3} = 1$. Первое уравнение корней не имеет, корни второго $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Наибольший корень $x_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x_0^3 - 4x_0 = 3$.

Ответ: 3.