Первый (заочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2017 г.

9 КЛАСС

1) *(5 баллов)* Решить уравнение

$$(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$$

2) *(5 баллов)* Компания из 10 друзей усаживается за круглый стол произвольным образом. Среди них есть один Ваня и один Дима. Какова вероятность того, что они окажутся рядом?

3) *(10 баллов)* Определить знак выражения

$$\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38}$$

4) *(10 баллов)* Решить уравнение

$$\sqrt{7 - x^2 + 6x} + \sqrt{6x - x^2} = 7 + \sqrt{x(3 - x)}$$

5) *(10 баллов)* Найти все значения параметров k и n, при которых система уравнений имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} ky + x + n = 0 \\ |y - 2| + |y + 1| + |1 - y| + |y + 2| + x = 0 \end{cases}$$

6) *(15 баллов)* Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два корня, разность которых не меньше натурального числа $n \geq 2$. Докажите, что квадратный трехчлен $f(x) +$ $+f(x+1) + \cdots + f(x+n)$ имеет два корня.

7) *(20 баллов)* Даны m натуральных чисел, не превосходящих n, расположенные в порядке неубывания: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$. Аналогично n натуральных чисел, не превосходящих m, расположены в порядке неубывания: $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Верно ли, что всегда найдутся два номера i и j такие, что $a_i + i = b_j + j$.

8) *(25 баллов)* Пусть h и l – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $\frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$.