

**Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 9 класс, весна 2018 г.**

Вариант №5

1) (10 баллов) Решите уравнение

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 5) = 15$$

2) (10 баллов) Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы – 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

3) (10 баллов) На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника ABC отмечены точки Е и F такие, что AF = AC и BE = BC. Найдите угол ECF.

4) (10 баллов) Ваня в вершинах квадрата записал четыре натуральных числа, затем он возле каждой стороны записал произведение чисел в её концах. Проходящей мимо Ксюше Ваня сообщил, что сумма этих произведений равна 143. Ксюша, не смотря на рисунок Вани, немного подумала и назвала сумму чисел в вершинах, с чем Ваня согласился. Какое число назвала Ксюша? Дать обоснованный ответ.

5) (15 баллов) Решите неравенство

$$\sqrt{x} \cdot \left(\frac{-x^2 + 81 + (x - 9)\sqrt{x^2 + 6x - 27}}{9 - x^2 + (x + 3)\sqrt{x^2 + 6x - 27}} \right) \cdot \sqrt{\frac{x - 3}{x + 9}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

6) (15 баллов) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет только одно решение.

$$|x - a^5 + a| + |x + a + 32| = a^3 + a^2 - a + 2$$

7) (15 баллов) а) Имеют ли общие члены две последовательности: 3; 16; 29; 42;... и 2; 19; 36; 53;...? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

б) Имеют ли общие члены две последовательности: 5; 16; 27; 38;... и 8; 19; 30; 41...? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

в) Определите, какое наибольшее количество общих членов может быть у двух арифметических прогрессий 1; ...; 1000 и 9; ...; 999, если известно, что у каждой из них разность является целым числом, отличным от 1.

8) (15 баллов) В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что AB=13, BC=10, CD=15, DA=24.

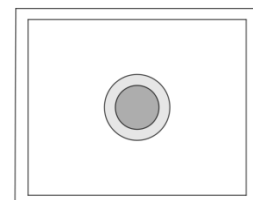
Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 9 класс, весна 2018 г.

Вариант №9

Задача 1. (10 баллов) Решите уравнение

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 - 4 + x\sqrt{2}}{18} = 0$$

Задача 2. (10 баллов) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



Задача 3. (10 баллов) Дан треугольник ABC , где $BA=5$, $BC=8$. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке P . Известно, что $BP=3$. Найдите площадь треугольника $BMР$, где M -точка касания окружности со стороной AC .

Задача 4. (10 баллов) Подряд в строчку выписана 2018 цифр. Известно, что в этой строчке каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они записаны), делится на 17 или на 23. В этой строчке последняя цифра 5. Какая цифра в строчке первая? Дать обоснованный ответ.

Задача 5. (15 баллов) Решите неравенство

$$\left(2 + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}}\right) : \left(-2 + \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}}\right) \geq \sqrt{x - 8}$$

Задача 6. (15 баллов) На плоскости xOy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, заданных уравнением

$$ax^2 + (1 - 6a)x + 2 - a - 2y + ay^2 = 0$$

Задача 7. (15 баллов) Пусть S_n – сумма n первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$. Известно, что $S_{n+1} = 2n^2 - 21n - 23$.

- Укажите формулу n -го члена этой прогрессии.
- Найдите наименьшую по модулю сумму S_n .
- Найдите наименьшее n , при котором S_n будет квадратом целого числа

Задача 8. (15 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC=3$ и $BC=2$ проведены медиана CM и биссектриса CL .

- Найдите отношение площадей треугольников CML и ABC .
- Найдите тангенс угла MCL .