

Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 10 класс, весна 2018 г.

Вариант №1

Задача 1. (10 баллов) Сравните числа: $99!$ и 50^{99} (напомним: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$).

Задача 2. (10 баллов) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

Задача 3. (10 баллов) Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{3 - x}\right)^2 \left(x^2 - 4\sqrt{x^2 - 6x + 9}\right)}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 8x + 16}} \geq 0$$

Задача 4. (10 баллов) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15} + \sqrt{x+80} + 2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80} = 315 - 2x.$$

Задача 5. (15 баллов) Назовем число «Новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «Новогодних» чисел?

Задача 6. (15 баллов) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра b , при которых неравенство $2b + b^2 - 2b \sin x > \cos^2 x + 2$ выполняется при любом значении x .

Задача 8. (15 баллов) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AC , которая пересекает его боковые стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник MVK и касается его боковой стороны MK в точке E , а первая окружность касается стороны AB в точке F . Найдите длину отрезка EF , если периметр треугольника MVK равен 6, а $AC=3$.

Второй (заключительный) этап олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по общеобразовательному предмету
«Математика», 10 класс, весна 2018 г.

Вариант №11

Задача 1. (10 баллов) Вычислите $tg^2 x + ctg^2 x$, если $tgx - ctgx = -3$

Задача 2. (10 баллов) Решить неравенство: $\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \geq 128$

Задача 3. (10 баллов) Решить уравнение: $\sqrt[4]{514-x} + \sqrt[4]{192+x} = 8$.

Задача 4. (15 баллов) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т.д.).

Задача 5. (15 баллов) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

Задача 6. (15 баллов) Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

Задача 7. (15 баллов) Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(a+2)x^2 + (|a+3| - |a+11|)x + a = 4$ имеет два различных положительных корня.

Задача 8. (15 баллов) В треугольнике ABC с основанием AC=14 и боковыми сторонами AB=13 и BC=15 из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка – центр описанной около ABC окружности, а еще две точки M и K лежат на боковых сторонах треугольника ABC. Найдите площадь треугольника MBK, если длина этой ломаной линии наименьшая.