

## Решение задач заочного тура, 9 класс

1. Решить уравнение

$$(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2$$

**Решение:**

$$(x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 20x^2 \Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(3x - 10 + 3\frac{1}{x}\right) = 20$$

Подстановка  $x + \frac{1}{x} = t$

$$(t - 1) \cdot (3t - 10) = 20 \Leftrightarrow 3t^2 - 13t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 5 \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}. \text{ Второе уравнение системы}$$

не имеет решений.

**Ответ:**  $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

2. (5 баллов) Компания из 10 друзей усаживается за круглый стол произвольным образом. Среди них есть один Ваня и один Дима. Какова вероятность того, что они окажутся рядом?

**Решение:**

Подсчитаем число рассадок, когда Ваня и Дима сидят рядом. Если Ваня выбрал место, то Дима может выбрать одно из двух мест. После их выбора останется еще 8 мест, которые могут занять 8 человек  $8!$  способами. Ваня может выбрать 10 мест, после чего Дима выбирает одно из 2 мест. Всего получается «благоприятных» рассадок  $10 \cdot 2 \cdot 8!$ . Всех возможных способов рассадки  $10!$ . Следовательно, искомая вероятность равна  $\frac{10 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{2}{9}$

**Ответ:**  $\frac{2}{9}$

3. (10 баллов) Определить знак выражения

$$\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38} \quad \text{или} \quad (\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38})^{***}$$

**Решение:**

**1 способ:** Каждое подкоренное выражение – есть куб разности двух чисел:

$$25\sqrt{7} - 27\sqrt{6} = (\sqrt{7} - \sqrt{6})^3$$

$$17\sqrt{5} - 38 = (\sqrt{5} - 2)^3$$

Тогда  $\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38} = (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{3/2} - (\sqrt{5} - 2)^{3/2}$

Знак выражения определяется знаком разности чисел

$$(\sqrt{7} - \sqrt{6}) - (\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{7} + 2) - (\sqrt{6} + \sqrt{5})$$

Сравним числа

$$\sqrt{7} + 2 \vee \sqrt{6} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 7 + 4\sqrt{7} + 4 \vee 6 + 2\sqrt{30} + 5 \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{7} \vee 2\sqrt{30} \Leftrightarrow 112 \vee 120$$

$$112 < 120 \Rightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{6}) < (\sqrt{5} - 2) \Rightarrow \sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38} < 0$$

**Ответ:**  $\sqrt{25\sqrt{7} - 27\sqrt{6}} - \sqrt{17\sqrt{5} - 38} < 0$

**2 способ:** Сравним подкоренные выражения  $25\sqrt{7} - 27\sqrt{6} \vee 17\sqrt{5} - 38$

Так как оба числа положительные, то возводим их квадрат и постепенно избавляемся от корней. В результате получаем, что уменьшаемое больше вычитаемого. Таким образом знак разности отрицательный.

4. (10 баллов) Решить уравнение

$$\sqrt{7 - x^2 + 6x} + \sqrt{6x - x^2} = 7 + \sqrt{x(3 - x)}$$

**Решение:**

ОДЗ переменной  $x$  в нашей задаче-отрезок  $[0;3]$ . Выделяя полные квадраты в подкоренных выражениях левой части уравнения или строя графики, замечаем, что значения первого корня не превышают 4, второго 3 и наименьшие значения достигаются при  $x=3$ . Значение левой части уравнения не превышает 7, а правая часть не меньше 7. Значит, равенство возможно, лишь когда обе части уравнения одновременно равны 7, что достигается при  $x=3$ .

**Ответ:** 3

5. (10 баллов) Найти все значения параметров  $k$  и  $n$ , при которых система уравнений имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} ky + x + n = 0 \\ |y - 2| + |y + 1| + |1 - y| + |y + 2| + x = 0 \end{cases}$$

**Решение:**

Удобно ввести систему координат, направив ось  $Ox$  вверх, вправо ось  $Oy$ . Разобьем ось  $Oy$  точками  $-2, -1, 1, 2$  на интервалы. На каждом интервале получаем свою систему и находим значения параметров, при которых прямые имеют бесконечное количество точек пересечения.

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} y \leq -2 \\ x = 4y \\ ky + x + n = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 0, k = -4 \\
 2) \begin{cases} -2 < y < -1 \\ x = 2y - 4 \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow k = -2, n = 4 \\
 3) \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ x = -6 \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow n = 6, k = 0 \\
 4) \begin{cases} 1 < y < 2 \\ x = -4 - 2y \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow k = 2, n = 4 \\
 5) \begin{cases} y \geq 2 \\ x = -4y \\ x = -ky - n \end{cases} \Rightarrow k = 4, n = 0
 \end{array}$$

**Ответ:**  $(k;n) = (4;0); (-4;0); (2;4); (-2;4); (0;6)$

6. (15 баллов) Квадратный трехчлен  $f(x)$  имеет два корня, разность которых не меньше натурального числа  $n \geq 2$ . Докажите, что квадратный трехчлен  $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n)$  имеет два корня.

**Решение:**

Пусть квадратный трехчлен  $f(x)$  имеет действительные корни  $x_1$  и  $x_2 = x_1 + n + a$ , где  $a \geq 0$ . Для определенности будем считать, что коэффициент при  $x^2$  положителен. Положим  $x_0 = x_1 + a/2$ . Тогда  $x_0 \geq x_1$  и  $x_0 + n \leq x_2$ .

Поэтому  $f(x_0) + f(x_0+1) + \dots + f(x_0+n) < 0$ . В то же время у квадратного трехчлена  $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n)$  коэффициент при  $x^2$  положителен, поэтому при достаточно больших по модулю  $x$  он принимает положительные значения. А это означает, что данный квадратный трехчлен имеет два корня.

7. (20 баллов) Даны  $m$  натуральных чисел, не превосходящих  $n$ , расположенные в порядке неубывания:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ . Аналогично  $n$  натуральных чисел, не превосходящих  $m$ , расположены в порядке неубывания:  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ . Верно ли, что всегда найдутся два номера  $i$  и  $j$  такие, что  $a_i + i = b_j + j$ .

**Решение:**

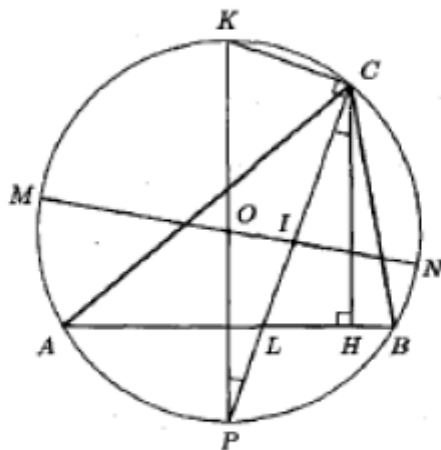
Так как  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq n$ , то  $2 \leq a_1 + 1 < a_2 + 2 < \dots < a_m + m \leq n + m$ . Аналогично  $2 \leq b_1 + 1 < b_2 + 2 < \dots < b_n + n \leq m + n$ . Таким образом получается, что в пределах от 2 до  $m + n$  находится  $m + n$  натуральных чисел  $a_i + i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $b_j + j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Значит, какие-то два из них непременно совпадают. Но числа  $a_i + i$  все различны – среди них нет совпадений, аналогично нет совпадений среди чисел  $b_j + j$ . Поэтому совпадают какие-то два числа  $a_i + i$  и  $b_j + j$ .

**Ответ:** Да, верно.

8. (25 баллов) Пусть  $h$  и  $l$  – высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника,  $r$  и  $R$  – радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите,

$$\text{что } \frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Решение:



Пусть  $CL$  – биссектриса  $\angle ACB$ ,  $P$  – точка пересечения биссектрисы с описанной окружностью,  $I$  – центр вписанной окружности,  $O$  – центр описанной окружности.

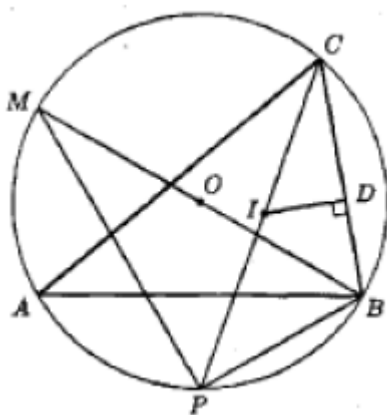
1) Угловая величина дуги  $PB$  равна углу  $ACB$ , угловая величина дуги  $BC$  равна  $2 \cdot \angle CAB$ . Тогда  $\angle PKC = \frac{1}{2}(\angle ACB + 2 \cdot \angle CAB) = \frac{1}{2} \cdot \angle ACB + \angle CAB = \angle CLH$  (как внешний угол для треугольника  $ALC$ ). Но тогда  $\angle KPC = \angle LCH$

2) Обозначим угол  $LCH$  за  $\alpha$ . Тогда  $\cos \alpha = \frac{h}{l}$ . С другой стороны, из

треугольника  $KPC$  находим

$$\cos \alpha = \frac{PC}{KP} = \frac{CI + IP}{2R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{CI + IP}{2} \geq \frac{1}{R} \sqrt{CI \cdot IP} \quad (\text{по неравенству Коши для среднего арифметического и среднего геометрического})$$

3) Рассмотрим отдельно произведение  $CI \cdot IP$ :



$D$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $I$  на сторону  $BC$ . Проведем диаметр  $BM$ , тогда треугольники  $CDI$  и  $BPM$  подобны. Поэтому  $\frac{CI}{2R} = \frac{r}{PB}$ . Откуда  $CI \cdot PB = 2Rr$ .

4) В треугольнике  $BPI$   $\angle PBI = \angle PCA + \angle ABI$ . А  $\angle PIB$  является внешним для треугольника  $IBC$ , поэтому он равен  $\angle PIB = \angle ICB + \angle IBC = \angle PCA + \angle ABI$ . Таким образом, получается, что треугольник  $BPI$  равнобедренный, а значит, что  $PB = PI$ .

Но тогда  $CI \cdot PI = 2Rr$ .

5) Возвращаясь к пункту 2, имеем:

$$\frac{h}{l} = \cos \alpha \geq \frac{1}{R} \sqrt{CI \cdot IP} = \frac{1}{R} \sqrt{2Rr} = \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Что и требовалось доказать

### Критерии проверки заданий 9-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	5	5	10	10	10	15	20	25	100

#### Задача 1

Баллы	
5	Обоснованно получен правильный ответ
2	Ход решения правильный, но ответ получен неверный из-за одной арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

#### Задача 2

Баллы	
5	Обоснованно получен правильный ответ
3	В решении (в любой вероятностной модели) верно найдено число всех возможных исходов или число благоприятных исходов. В решении сделана арифметическая ошибка при правильном указании числа всех благоприятных исходов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

#### Задача 3

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ любым способом, кроме непосредственного вычисления с помощью калькулятора
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

#### Задача 4

Баллы	
10	Полное обоснованное решение
5	Решение недостаточно обосновано
2	Угадано решение $x=3$ без дальнейших объяснений
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

### Задача 5.

Баллы	
10	Полное обоснованное решение
8	Полное решение, содержащее арифметическую ошибку
5	Модули раскрыты без условий или рассмотрены не все случаи
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

### Задача 6.

Баллы	
15	Приведено обоснованное доказательство, возможно, отличающееся от записанного выше
10	Верно определен знак выражения $f(x_0) + f(x_0+1) + \dots + f(x_0+n)$
5	Введены точки $x_0 = x_1 + a/2$ ; $x_0 \geq x_1$ и $x_0 + n \leq x_2$ . Сделана попытка рассмотрения знаков квадратного трехчлена в этих точках
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

### Задача 7

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ
15	В целом решение правильное, но имеются недостатки в обосновании
10	В решении указаны общие границы для чисел $a_i + i$ ( $i = 1, \dots, m$ ) и $b_j + j$ ( $j = 1, \dots, n$ ), но не получен обоснованный ответ (например, нигде не указано, что числа $a_i + i$ все различны, как и числа $b_j + j$ ).
5	Построены цепочки чисел
0	Решение не соответствует ни одному из критериев

### Задача 8

Баллы	
25	Обоснованно пройдена вся цепочка доказательств
по 5	За каждый из выполненных пунктов
0	Решение не соответствует ни одному из критериев