Решение варианта №5, 9 класс

1) *(10 баллов)* Решите уравнение

$$(x^2+3x+2)(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=15$$

Решение:

Сделаем замену переменной $\boldsymbol{x^2+3x=t}$; $\boldsymbol{t^2+7t+11=z}$; z^2=16; тогда t^2+7t+11=4 имеет корни $t=\frac{-7\pm\sqrt{21}}{2}$, а соответствующие уравнения для x дают корни $x=\frac{-3\pm\sqrt{-5+2\sqrt{21}}}{2}$. Уравнение t^2+7t+11=-4 корней не имеет.

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{-5+2\sqrt{21}}}{2}$

2) *(10 баллов)* Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы – 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

Решение.

Пусть на момент встречи у Вани было $\boldsymbol{x}$ руб., $\boldsymbol{0\le x\le 1000}$, у Димы $-$ $\boldsymbol{y}$ руб., $\boldsymbol{0\le y\le 2000}$. Рассмотрим прямоугольник $\boldsymbol{0\le x\le 1000}$, $\boldsymbol{0\le y\le 2000}$ как множество всех элементарных исходов. Область в прямоугольнике, определенная условием $\boldsymbol{x+y\ge 1800}$, соответствует благоприятным исходам. Рассмотрим отношение площади области благоприятных исходов к площади прямоугольника и получим искомую вероятность: $\frac{1000\cdot 200+\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 1000}{1000\cdot 2000}=\frac{7}{20}$.

Ответ. $\frac{7}{20}$.

3) *(10 баллов)* На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что AF = AC и BE = BC. Найдите угол ECF.

Решение:

Треугольник CAF – равнобедренный. Если угол CAB = $\propto$, то $\angle$ ACF = $90° - \frac{\propto}{2}$.

Треугольник CBE – равнобедренный. Если угол CBA = β, то $\angle$ BCE = $90° - \frac{\beta}{2}$..

Тогда $\angle ECF = 90° - \frac{\propto}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} - 90° = 45°$.

Ответ: 45°

4) *(10 баллов)* Ваня в вершинах квадрата записал четыре натуральных числа, затем он возле каждой стороны записал произведение чисел в её концах. Проходящей мимо Ксюше Ваня сообщил, что сумма этих произведений равна 143. Ксюша, не смотря на рисунок Вани, немного подумала и назвала сумму чисел в вершинах, с чем Ваня согласился. Какое число назвала Ксюша? Дать обоснованный ответ.

Решение.

Пусть в вершинах были записаны числа $\boldsymbol{a, b, c}$ и $\boldsymbol{d}$. Тогда возле сторон были записаны числа $\boldsymbol{ab, bc, cd}$ и $\boldsymbol{da}$. Их сумма равна

$\boldsymbol{ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 143.}$ Разложим 143 на множители: $143 = 11 \cdot 13 = 1 \cdot 143$. Других разложений нет, так как 11 и 13 – простые числа. Вариант $1 \cdot 143$ не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, $\boldsymbol{a + c} = 11$, $\boldsymbol{b + d} = 13$ или наоборот. В обоих случаях $\boldsymbol{a + b + c + d} = 11 + 13 = 24$.

Ответ. 24.

5) *(15 баллов)* Решите неравенство

$$\sqrt{x} \cdot \left(\frac{-x^2 + 81 + (x-9)\sqrt{x^2 + 6x - 27}}{9 - x^2 + (x+3)\sqrt{x^2 + 6x - 27}}\right) \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x+9}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Решение:

ОДЗ неравенства $x > \mathbf{3}$. С помощью разложения на множители и сокращения одинаковых выражений с учетом ОДЗ получаем простое неравенство $\frac{9-x}{x+3} \geq \frac{1}{x}$. Пересекая множество его решений с условием ОДЗ, получаем $x \in \left(\mathbf{3}; \mathbf{4} + \sqrt{\mathbf{13}}\right]$

Ответ: $\left(\mathbf{3}; \mathbf{4} + \sqrt{\mathbf{13}}\right]$

6) *(15 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет только одно решение.

$$|x - a^5 + a| + |x + a + 32| = a^3 + a^2 - a + 2$$

Решение:

С помощью графического представления левой и правой частей уравнения на плоскости $\boldsymbol{y(x)}$ заметим, что левая часть - линейная функция с двумя изломами при $x = \boldsymbol{a^5 - a}$; $x = -a-32$, правая часть - горизонтальные прямые. Тогда решений либо нет, либо их бесконечно много (там, где участок между двумя изломами горизонтален), либо их два. Чтобы могло существовать одно решение, точки излома должны совпадать и правая часть при этом должна быть равна нулю. Это соответствует значению параметра a=-2.

Ответ: a=-2.

7) *(15 баллов)* а) Имеют ли общие члены две последовательности: 3; 16; 29; 42;… и 2; 19; 36; 53;…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

б) Имеют ли общие члены две последовательности: 5; 16; 27; 38;… и 8; 19; 30; 41…? (если да – привести пример, если нет – объяснить почему)

в) Определите, какое наибольшее количество общих членов может быть у двух арифметических прогрессий 1; …; 1000 и 9; …; 999, если известно, что у каждой из них разность является целым числом, отличным от 1.

Решение:

а) Первая последовательность $a_n = 3+13(n-1)$, вторая последовательность $b_k = 2+17(k-1)$

Нужно решить уравнение 13n-10 = 17k-15 или 13n=17k-5, n=14, k=11 ;

$a_{14} = 172; b_{11} = 172$

Ответ: **да, имеют общие члены**, например 172.

Б) Первая последовательность $a_n = 5 + 11(n-1)$, вторая последовательность $b_n = 8 + 11(k-1)$

Нужно решить уравнение 11n-6 = 11k-3 или 11n=11k-9. Это уравнение не имеет решений в целых числах, значит, общих членов у последовательностей нет.

В) Из формулы n-го члена арифметической прогрессии:

$1000 = 1 + d_1(n_1 - 1)$,

$999 = 9 + d_2(n_2 - 1)$.

Из первого уравнения: $\frac{999}{d_1} = n_1 - 1$, d_1 может равняться $37;27;9;3$.

Из второго уравнения: $\frac{990}{d_2} = n_2 - 1$, d_2 может равняться $2;3;5;6;9;10;11;12$ и т.д., большие d нам не интересны. Возьмем для первой прогрессии $d = 3$, для второй прогрессии все d, которые делятся на 3 не подходят, так как члены второй прогрессии будут делиться на три, а первой нет. Возьмем для второй прогрессии $d = 2$. Заметим, что каждый третий член этой прогрессии совпадает с членами первой прогрессии.

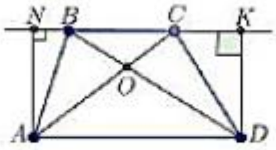
Всего во второй прогрессии $\frac{990}{2} + 1 = 496$ членов, из них $\frac{496}{3} = 165$ совпадают с членами первой прогрессии.

То, что количество совпадающих членов наибольшее, следует из того, что знаменатели обеих прогрессий наименьшие.

Ответ: а)Да, например, 172 б) Нет в) 165

8) *(15 баллов)* В выпуклом четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *AOB* и *COD* равны. Найдите площадь треугольника *AOB*, если известно, что *AB=13*, *BC=10*, *CD=15*, *DA=24*.

Решение:



(а) Опустим ⊥ -ры из точек A и D на прямую BC: AN⊥DC, DK⊥BC.

Надо доказать, что AN=DK.

Рассмотрим ΔABC и ΔBCD:

ΔABC можно разбить на два треугольника: ΔAOB и ΔBOC,

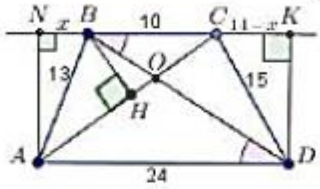
ΔBCD можно разбить на два треугольника: ΔCOD и ΔBOC.

По свойствам площадей: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} = S_{COD} + S_{BOC} = S_{BCD} \Rightarrow S_{ABC} = S_{BCD}$. $\dfrac{BC \cdot AN}{2} = \dfrac{BC \cdot DK}{2}$

$(S_{AOB} = S_{COD}$ по усл.) $\Downarrow$

AN=DK (ч.т.д.)

(б) $S_{AOB} - ?$



1) AN=DK (п.(а)), AN | | DK (∠N+∠K=180° - односторонние при сек. BC)

⇒ ANKD – параллелограмм и прямоугольник (∠N=∠K=90°)

⇒ BC | | AD ⇒ ABCD – трапеция.

2) Пусть NB=x, NK=AD=24, тогда CK=NK–NB–BC=14-x.

По т.Пифагора из п/у ΔANB и ΔDKC:

$AN^2 = AB^2 - NB^2 = 169 - x^2$, $DK^2 = CD^2 - CK^2 = 225 - (14 - x)^2$

Т.к. AN=DK, приравняем правые части: $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$, $28x = 140$, $x = 5$. $AN = \sqrt{169 - 25} = 12$.

3) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AN = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

4) ΔBOC ∾ ΔAOD по двум ∠ (∠BOC=∠AOD как вертикальные, ∠CBO=∠ODA – накрест-лежащие при BC | | AD, сек. BD

$\Rightarrow \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{5}{12}$.

5) Проведём BH⊥AC. ΔAOB и ΔBOC имеют одинаковую высоту (BH) $\Rightarrow \dfrac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{5}{12}$.

пусть $S_{BOC} = 5y$, $y > 0$, $S_{AOB} = 12y$, $S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ABC}$.

$12y + 5y = 60 \Rightarrow y = \dfrac{60}{17}$, тогда $S_{AOB} = 12 \cdot \dfrac{60}{17} = \dfrac{720}{17}$.

Ответ: 720/17

Решение варианта№9, 9 класс

Задача 1. (10 баллов) Решите уравнение

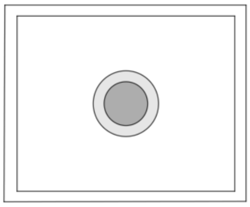
$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos\frac{x^2 - 4 + x\sqrt{2}}{18} = 0$$

1. Решение:

Представим уравнение в виде $(\sqrt{x^2+1} - 3)^2 + (1 - \cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18})$=0. Обе скобки неотрицательны, равенство суммы нулю возможно только при одновременном равенстве нулю выражений в обеих скобках. $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3 \\ \cos\frac{x^2-4+x\sqrt{2}}{18} = 1 \end{cases}$. Решения первого уравнения $x = \pm 2\sqrt{2}$. При x=$2\sqrt{2}$ система несовместна, при x=-$2\sqrt{2}$ второе уравнение дает $\cos 0 = 1$.

Ответ: x=-$2\sqrt{2}$

Задача 2. (10 баллов) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



2. Решение:

По условию центр второй кляксы находится на расстоянии не менее 2 см от края листа, т.е. внутри прямоугольника 11 см на 16 см. Рассмотрим событие А «Кляксы пересекаются». Для этого нужно, чтобы центр второй кляксы попал в круг радиусом 4 см с тем же центром, что и первая клякса.

Вероятность этого события $P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{пр}} = \frac{16\pi}{11\cdot 16} = \frac{\pi}{11}$.

Ответ. $\frac{\pi}{11}$.

Задача 3. (10 баллов) Дан треугольник **ABC,** где **BA**=5, **BC**=8. В треугольник вписана окружность, касающаяся стороны **BC** в точке **P**. Известно, что **BP**=3. Найдите площадь треугольника **BMP**, где **M**-точка касания окружности со стороной **AC**.

3. Решение:

Сторона AC треугольника равна 7. По Формуле Герона $S_{ABC} = 10\sqrt{3}$.

Тогда $S_{\text{BMC}} = \frac{5}{7}S_{ABC} = \frac{50\sqrt{3}}{7}$. Тогда $S_{\text{BM}P} = \frac{3}{8}S_{BMC} = \frac{75\sqrt{3}}{28}$.

Ответ: $\frac{75\sqrt{3}}{28}$

Задача 4. (10 баллов) Подряд в строчку выписана 2018 цифр. Известно, что в этой строчке каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они записаны), делится на 17 или на 23. В этой строчке последняя цифра 5. Какая цифра в строчке первая? Дать обоснованный ответ.

Решение:

Все двузначные числа, делящиеся на 17 или на 23:

$$17,\quad 34,\quad 51,\quad 68,\quad 85,$$

$$23,\quad 46,\quad 69,\quad 92$$

В следующей схеме показано стрелками, какая цифра за какой может стоять в строчке:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & 7 & & 9 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 \\
\uparrow & & & & \uparrow & & & \swarrow & \\
5 & \longleftarrow & 8 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & &
\end{array}$$

Перебор цифр в строчке справа налево соответствует движению против направления стрелок. Если в этой схеме шаги делать против направления стрелок, начиная с цифры 5, то за два шага попадаем в 6, а дальше будем ходить по циклу, через каждые 5 шагов снова попадая в 6.

Поскольку $2017 = 2 + 5 \cdot 403$, то первая цифра будет 6.

Ответ. 6.

Задача 5. (15 баллов) Решите неравенство

$$\left(\mathbf{2}+\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}}\right):\left(-\mathbf{2}+\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}}\right)\geq\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{8}}$$

Решение:

Пусть $\sqrt{x-4}$=t,t$\geq 0.$ ОДЗ задачи $x \geq 8, t \geq 2.$ $\frac{2+\sqrt{t^2-4t+4}}{-2+\sqrt{t^2+4t+4}} \geq \sqrt{t^2-4}$;

$\frac{2+|t-2|}{-2+|t+2|} \geq \sqrt{t^2-4}$;

$\sqrt{t^2-4} \leq 1;\ t^2-4 \leq 1; x-4 \leq 5; 8 \leq x \leq 9.$

Ответ: (8;9)

Задача 6. (15 баллов) На плоскости **xOy** укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, заданных уравнением

$$\mathrm{a}x^2+(1-6a)x+2-a-2y+ay^2=0$$

Решение:

Представим уравнение как линейное относительно параметра a.

a$(x^2-6x-1+y^2)=-x-2+2y$. Если это уравнение не будет иметь решений при любом a, мы найдем те точки (x;y), через которые не проходит ни одна из кривых. $\begin{cases} x^2-6x-1+y^2=0 \\ -x-2+2y\neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 10=y^2+(x-3)^2 \\ y\neq \frac{x+2}{2} \end{cases}$, получаем окружность $10=y^2+(x-3)^2$ без точек (0;1) и (4;3).

Ответ: $10=y^2+(x-3)^2$ без точек (0;1) и (4;3).

Задача 7. (15 баллов) Пусть **S_n** – сумма **n** первых членов арифметической прогрессии **$\{a_n\}$.** Известно, что **$S_{n+1}=2n^2-21n-23$**.

а) Укажите формулу **n**-го члена этой прогрессии.

б) Найдите наименьшую по модулю сумму **S_n.**

в) Найдите наименьшее n, при котором **S_n** будет квадратом целого числа

Решение:

а) $a_n=4n-27$. $S_n=S_{(n-1)+1}=2(n-1)^2-21(n-1)-23=2n^2-25n$;

$S_{n-1}=2(n-1)^2-25(n-1)=2n^2-29n+27\Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1}=4n-27$.

б) –12. Поскольку $a_n=4n-27<0$ при $n\le 6$ и $a_n>0$ при $n\ge 7$, S_n убывает от значения $a_1=-23$ до S_6, далее возрастает.

$S_n=2n^2-25n<0$ при $n\le 12$, $S_n>0$ при $n\ge 13$. Следовательно,

$|S_n|_{\min}=\min\{|a_1|;|S_{12}|;|S_{13}|\}=\min\{|-23|;|-12|;13\}=12$ при $n=12$. $S_{12}=-12$.

в) 25. Пусть $S_n=2n^2-25n=k^2$. (*)

Заметим, что число $n(2n-25)$ заведомо будет квадратом целого числа, если $n=2n-25$, то есть при $n=25$. Покажем, что S_n не является точным квадратом при $n\in[13;24]$.

1 способ. Выясним, какой может быть последняя цифра числа $2n^2-25n$, в зависимости от последней цифры числа n, и результаты занесем в таблицу.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n^2-25n$	0	7	8	3	2	5	2	3	8	7

Из всех вариантов во второй строке таблицы, квадрат целого числа может оканчиваться только на 0 и 5, когда n также оканчивается на 0 и 5. Таких чисел в рассматриваемом промежутке два – 15 и 20. Числа $S_{15}=75$ и $S_{20}=300$ не являются точными квадратами. Значит, при $n\in[13;24]$ равенство (*) невозможно, что и требовалось доказать.

2 способ. Установим, какие значения могут принимать остатки от деления на 5 левой и правой частей равенства (*). Составим таблицу остатков, используя известное утверждение арифметики остатков: произведение (сумма) чисел дает такой же остаток при делении (на некоторое число), как и произведение (сумма) остатков этих чисел.

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	4	1
$2n^2-25n$	0	2	3	3	2

При составлении таблицы учтено, что $25n$ делится на 5, то есть дает остаток 0. Числа 2 и 3 не могут быть остатками при делении на 5 квадрата целого числа (см. вторую строку таблицы). Следовательно, n делится на 5. Далее – как в 1 способе.

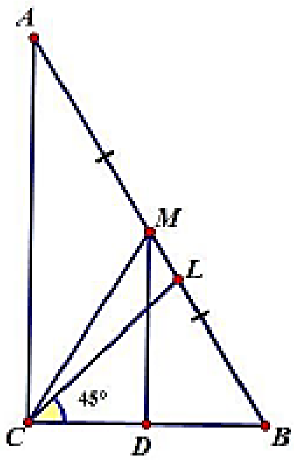
Ответ: а) $a_n = 4n - 27$; б) -12; в) 25

Задача 8. (15 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC=3 и **BC**=2 проведены медиана **CM** и биссектриса **CL.**

а) Найдите отношение площадей треугольников **CML** и **ABC**.

б) Найдите тангенс угла **MCL**.

Решение:



а) По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$.

По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, $AM = BM = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника: $\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$.

Если $BL = 2k$, то $AL = 3k$, $AB = 5k$, $k = \frac{\sqrt{13}}{5}$, $BL = \frac{2\sqrt{13}}{5}$, $AL = \frac{3\sqrt{13}}{5}$. $BL < AL$, значит, точка L лежит между M и B. $ML = BM - BL = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{5} = \frac{\sqrt{13}}{10}$.

Так как треугольники CML и ABC с основаниями ML и AB соответственно имеют равные высоты, проведенные к этим сторонам из их общей вершины C, то:
$\frac{S(ABC)}{S(CML)} = \frac{AB}{ML} = \sqrt{13} : \frac{\sqrt{13}}{10} = 10$, что и требовалось доказать.

б) Проведем MD – среднюю линию треугольника ACB. Тогда $MD = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$.
$\angle MCL = \angle MCD - 45^\circ$. $tg\angle MCL = tg(\angle MCD - 45^\circ) = \frac{tg\angle MCD - tg 45^\circ}{1 + tg\angle MCD \cdot tg 45^\circ}$.
$tg\angle MCD = \frac{MD}{CD} = \frac{3}{2} : 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5;$ $tg\angle MCL = \frac{1{,}5 - 1}{1 + 1{,}5 \cdot 1} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{1}{5};$ $\angle MCL = arctg\,\frac{1}{5}$.

Ответ: а) 1/10; б) arctg(1/5)

Критерии проверки заданий 9 класса

Задача 1

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
5	Решение сведено к системе условий , но решение не завершено или есть **одна** арифметическая ошибка.
0	Ответ не обоснован.

Задача 2

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
5	В решении построена вероятностная модель, в рамках которой правильно определена или область всех элементарных исходов, или область благоприятных исходов. Возможна арифметическая ошибка.
0	Ответ не обоснован.

Задача 3

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
5	неверный ответ получен вследствие арифметической ошибки при верной последовательности действий (возможно, иной, чем в приведенном решении)
0	Ответ не обоснован.

Задача 4

Баллы	
10	Получен правильный обоснованный ответ.
5	Замечена «цикличность» цифр в строчке, но решение не доведено до конца.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев.

Задача 5

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Собраны полные квадраты, в условиях ОДЗ раскрыты модули, но есть **одна** арифметическая ошибка
5	Найдена ОДЗ и есть продвижения в преобразованиях
0	Ответ не обоснован.

Задача 6

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.

10	Выписаны нужные условия, но далее есть **одна** арифметическая ошибка или не описано искомое множество точек
5	Есть кривые при отдельных значениях параметра а и попытка описать множество всех кривых.
0	Ответ не обоснован.

Задача 7

Баллы	
15	Обоснованно получены ответы в пунктах а), б) и в).
10	Обоснованно получены ответы в двух пунктах из трех
5	Обоснованно получен ответ в одном из пунктов (в п. а) приведен пример)
0	Решение не соответствует ни одному из вышеприведенных пунктов

Задача 8

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки при верной последовательности действий, возможно, иной, чем в приведенной решении
5	Решение верно начато, и получены какие-то промежуточные результаты
0	Решение не соответствует ни одному из вышеприведенных пунктов