

Решение задач заочного тура, 8 класс

1. Число  $\overline{6x62y4}$  делится на 11, а при делении на 9 дает остаток 6. Найти остаток от деления этого числа на 13. (15 баллов)

Решение

По признаку делимости на 11 получим

$$((x + 2 + 4) - (6 + 6 + y)) : 11 \text{ или } (x - 6 - y) : 11$$

Подберем подходящие варианты: (0;5) (1;6) (2;7) (3;8) (4;9) (6;0) (7;1) (8;2) (9;3).

Если число  $\overline{6x62y4}$  при делении на 9 дает остаток 6, то по признаку делимости на 9 получим

$$(6 + x + 6 + 2 + y + 4) - 6 : 9$$

или  $(12 + x + y) : 9$

Подходит сочетание (6;0), следовательно, исходное число - 666204 .

Остаток от деления этого числа на 13 - число 6.

Ответ: 6.

2. Пять человек, выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, так же, как второй, четвёртый и пятый, выполняют работу за час. Первый, работая с пятым, так же, как и третий, работая с четвёртым, выполняют работу за 2 часа. За какое время все пять человек вместе выполняют эту работу? (15 баллов)

Решение:

Пусть  $V$ - объём работ,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  - скорость выполнения работы соответственно.

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3) * 1 = V \\ (x_2 + x_4 + x_5) * 1 = V \\ (x_1 + x_5) * 2 = V \\ (x_3 + x_4) * 2 = V \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = V \\ x_2 + x_4 + x_5 = V \\ x_1 + x_5 = \frac{V}{2} \\ x_3 + x_4 = \frac{V}{2} \end{cases}$$

Сложим все уравнения. Получим:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3V$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 3V$$

Искомое время  $t = \frac{V}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)}$ , тогда  $\frac{V}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)} = \frac{2}{3}$ .

$$t = \frac{2}{3} \text{ часа} = 40 \text{ минут.}$$

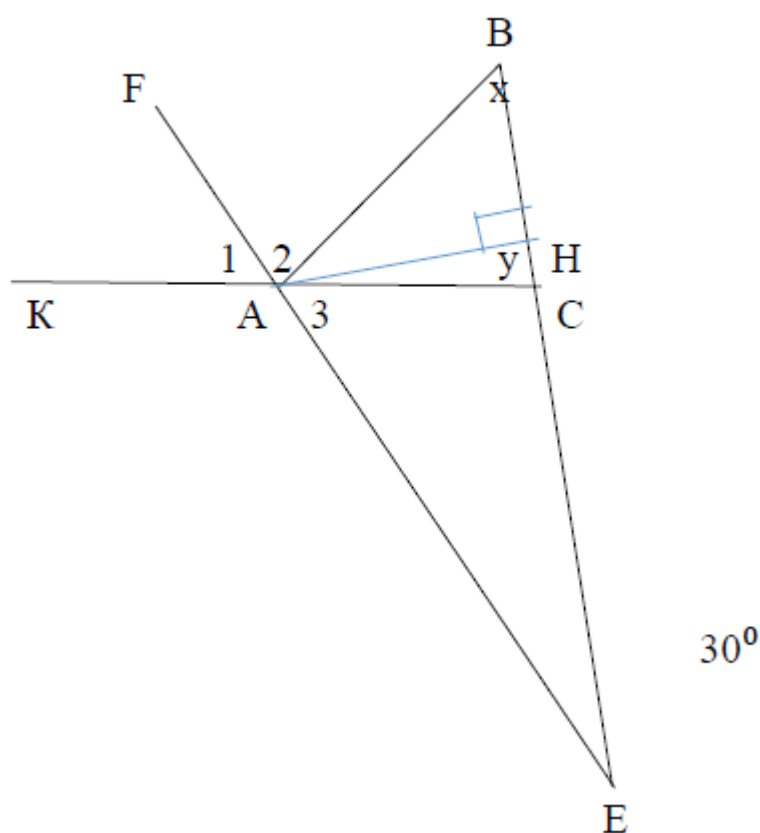
Ответ:  $\frac{2}{3}$  часа (40 минут)

3. Биссектриса внешнего угла при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает продолжение стороны  $BC$  в точке  $E$ . Доказать, что если  $AE$  в два раза больше высоты треугольника, опущенной из вершины  $A$ , то один из углов  $B$  и  $C$  треугольника на  $60^\circ$  больше другого. (20 баллов)

Решение.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть угол  $B$  – острый.



Так как  $AH = 1/2 AE$ , то в треугольнике  $AHE$  угол  $E = 30^\circ$ . Пусть  $\angle B = x, \angle C = y$ , тогда  $\angle KAB = x + y$  (по свойству внешнего угла).

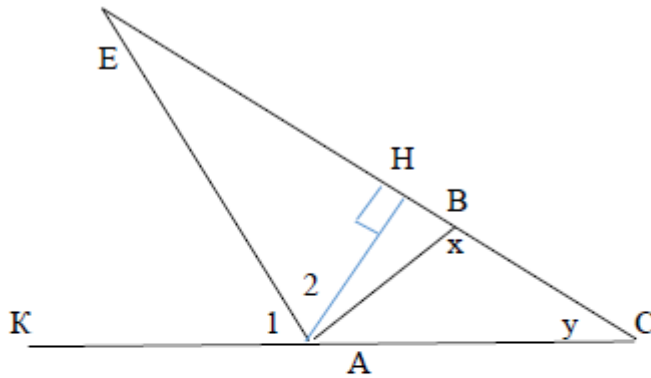
Значит,  $\angle 1 = \angle 2 = \frac{x+y}{2}$  (так как  $AF$  – биссектриса).  $\angle 1 = \angle 3 = \frac{x+y}{2}$  (как вертикальные).

Рассмотрим  $\triangle ACE$ :  $\angle ACE = 180^\circ - (30^\circ + \angle 3) = 150^\circ - \frac{x+y}{2}$ .

С другой стороны,  $\angle ACE = 180^\circ - y$ . Получим:

$$150^\circ - \frac{x+y}{2} = 180^\circ - y, \quad y - \frac{x+y}{2} = 30^\circ, \quad y - x = 60^\circ.$$

2. Угол В – тупой.



$$\begin{aligned} \angle KAB = x + y, \angle 1 = \angle 2 = \frac{x+y}{2}. \text{ В } \triangle EAH \angle EAH = 60^\circ, \text{ тогда } \angle HAB = \\ \angle 2 - \angle EAH = \frac{x+y}{2} - 60^\circ. \text{ В } \triangle HAB: \\ \angle HBA = 90^\circ + 60^\circ - \frac{x+y}{2} = 180^\circ - x, \frac{x-y}{2} = 30^\circ, x - y = 60^\circ. \end{aligned}$$

4. Числа  $x$  и  $y$  являются решениями системы  $\begin{cases} ax - y = 2a + 1 \\ -x + ay = a \end{cases}$ , где  $a$ -параметр.

Какое наименьшее значение может принимать выражение  $2y^2 - x^2$ , если  $a \in [-0,5; 2]$ , (20 баллов)

Решение:  $\begin{cases} ax - y = 2a + 1 \\ x = a(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(y - 1) - y = 2a + 1 \\ x = a(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(a^2 - 1) = a^2 + 2a + 1 \\ ay - a = x \end{cases}$

При  $a \neq \pm 1$

$$\begin{cases} y = \frac{a+1}{a-1} \\ x = \frac{2a}{a-1} \end{cases}$$

$$F(a) = 2y^2 - x^2 = 2\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 - \left(\frac{2a}{a-1}\right)^2 = \frac{2(a^2 + 2a + 1 - 2a^2)}{(a-1)^2} = \frac{-2(a^2 - 2a - 1)}{(a-1)^2} = -2 + \frac{4}{(a-1)^2}$$

$$F(-0,5) = -2/9.$$

Т.к. дробь всегда положительная, то наименьшее значение она принимает, когда  $(a-1)$  становится наибольшим по абсолютному значению, т.е. при  $a = -0,5$ .

Найдем значение выражения при  $a = \pm 1$ .

При  $a = -1$  система имеет бесконечно много решений, а при  $a = 1$  система не имеет решений.

Ответ:  $a = -0,5$ , наименьшее значение  $-2/9$ .

5. *Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф и Волк решили взвеситься. Оказалось, что Волк весит больше, чем Ниф-Ниф; Нуф-Нуф и Ниф-Ниф весят больше, чем Волк и Наф-Наф; Нуф-Нуф и Наф-Наф весят столько же, сколько Волк и Ниф-Ниф. Расположите поросят и Волка в порядке убывания веса.(15 баллов)*

Решение.

Обозначим массы Волка за  $a$ , Ниф-Нифа за  $b$ , Наф-Нафа за  $c$ , Нуф-Нуфа за  $d$ . Из условия получим  $a > b$ (1),

$$d + b > a + c \text{ (2), } d + c = a + b \text{ (3)}.$$

Из условий (1) и (2) следует, что  $a + c > b + c$ , значит,  $d > c$ . Из условий (2) и (3) получим:  $2d + b + c > 2a + c + b$ , тогда  $d > a$ . Но если  $d > a$ , то из условия (3) следует, что  $b > c$ . Таким образом, известно, что  $d > a, a > b, b > c$ . Выполнение всех неравенств возможно, если

$$d > a > b > c.$$

Следовательно, Нуф-Нуф самый тяжелый, несколько легче Волк, еще легче Ниф-Ниф, самый легкий Наф-Наф.

6. *Три подруги - Маша, Оля и Света – поступили в лицей в экономический, информационный и математический классы. Если Маша экономистка, то Света не информатик. Если Оля не информатик, то Маша экономистка. Если Света не экономистка, то Оля – математик. Определите, в какие классы поступили девочки. Известно, что каждая девочка поступила в один класс, и классы различны.(15 баллов)*

Решение.

Пусть Оля не информатик, тогда по условию 2 Маша экономистка. Если Маша экономистка, то Света по условию 1 не информатик. Получили противоречие (Маша одновременно и информатик, и экономистка). Значит, Оля информатик. Тогда Света экономистка, иначе по условию 3 Оля была бы математиком. Значит, Маша математик, Оля информатик, Света экономистка.

Ответ: Маша поступила в математический класс, Оля в информационный, Света в экономический.

### Критерии проверки заданий 8-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	20	20	15	15	100

#### Задача 1

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Число найдено верно, но имеется вычислительная ошибка при нахождении остатка.
0	Найдены варианты с использованием признака деления на 11 и 9, но искомое число не найдено или найдено неверно

#### Задача 2

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Система составлена верно, время найдено с вычислительной ошибкой
5	Система составлена верно, но решение не закончено

#### Задача 3

Баллы	
20	Верное обоснованное решение задачи
15	Рассмотрены оба случая, но решение недостаточно обоснованно
10	Верно рассмотрен один случай
5	Есть продвижения в решении (например, рассмотрены свойства внешнего угла, биссектрисы и т.д.), но оно не закончено

#### Задача 4

Баллы	
20	Верное обоснованное решение задачи
15	Система решена верно, наименьшее значение найдено неправильно или не найдено. Или система решена, наименьшее значение найдено верно, но в решении не рассмотрены случаи $a = \pm 1$
10	Система решена без рассмотрения случаев $a = \pm 1$ , наименьшее

	значение не найдено
5	Есть продвижения в решении системы, но оно не закончено

### Задача 5

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Задача решена с недостаточными обоснованиями (например, составлены только два неравенства из трех)
5	Верно составлено одна или два неравенства из трех, но решение не закончено или закончено с ошибкой

### Задача 6

Баллы	
15	Верное обоснованное решение задачи
10	Решение верное, но недостаточно обоснованно
5	В решении имеются верные выводы, но оно не закончено или закончено с ошибкой