Решение задач заочного тура, 10 класс

1. Вычислить: $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+2017^2$.

Решение: $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+2017^2=$

$=\left(1^2-2^2\right)+\left(3^2-4^2\right)+\ldots+\left(2015^2-2016^2\right)+2017^2=$

$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\ldots+(2015-2016)(2015+2016)+2017^2=$

$=-(1+2)-(3+4)-\ldots-(2015+2016)+2017^2=$

$=-(1+2+3+4+\ldots+2015+2016)+2017^2=$

$=-\dfrac{1+2016}{2}\cdot 2016+2017^2=-2017\cdot 1008+2017^2=2017\cdot(2017-1008)=$

$=2017\cdot 1009=2035153$

Ответ: 2035153.

2. Решить уравнение: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$

Решение: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$

$4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2=0$

Сделаем замену: $t=x^2+16x+60$, тогда уравнение примет вид

$4(t+x)t-3x^2=0$

$4t^2+4tx-3x^2=0$

$(2t-x)(2t+3x)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 2t-x=0 \\ 2t+3x=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+31x+120=0 \\ 2x^2+35x+120=0 \end{array}\right.$$

$x_1=-7,5;\ \ x_2=8;\ \ x_{3,4}=\dfrac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$

Ответ: $-7,5$; 8; $\dfrac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$.

3. Решить неравенство: $$\frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}<\frac{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}$$

Решение: Сделаем замену: $t=\dfrac{1+x}{1-3x}$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{1+\dfrac{1+t}{1-3\cdot t}}{1-3\cdot\dfrac{1+t}{1-3\cdot t}}<\frac{1-3\cdot\dfrac{1+t}{1-3\cdot t}}{1+\dfrac{1+t}{1-3\cdot t}}$$

$$\frac{\dfrac{2-2t}{1-3t}}{\dfrac{-2-6t}{1-3t}}<\frac{\dfrac{-2-6t}{1-3t}}{\dfrac{2-2t}{1-3t}}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2-2t}{-2-6t}<\dfrac{-2-6t}{2-2t}\\ t\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t-1}{3t+1}<\dfrac{3t+1}{t-1}\\ t\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{1+x}{1-3x}-1}{3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}+1}<\dfrac{3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}+1}{\dfrac{1+x}{1-3x}-1}\\ \dfrac{1+x}{1-3x}\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\dfrac{4x}{1-3x}}{\dfrac{4}{1-3x}}<\dfrac{\dfrac{4}{1-3x}}{\dfrac{4x}{1-3x}}\\ \dfrac{1+x}{1-3x}\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x}{4}<\dfrac{4}{4x}\\ x\neq\dfrac{1}{3}\\ x\neq-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{1}{x}\\ x\neq\dfrac{1}{3}\\ x\neq-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\\ x\neq\dfrac{1}{3}\\ x\neq-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

4. Поезд идет со скоростью 60 километров в час, делая остановки через каждые 48 километров. Продолжительность каждой остановки, кроме пятой – 10 минут, пятая остановка – полчаса. Какое расстояние прошел поезд, если он отправился в путь в полдень 29 сентября, а пришел в пункт назначения 1 октября в 22-00?

Решение: Поезд находился в пути 58 часов.

Участок пути длиной в 48 километров поезд преодолевает за $\frac{4}{5}$ часа.

Пусть поезд в пути сделает N остановок, тогда время его движения будет равно $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)(N-1)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)+t=58$, где t - время прохождения последнего участка пути, длина которого больше 0 км , но не более 48 км, следовательно, $t\in\left(0;\frac{4}{5}\right]$.

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)(N-1)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)+t=58$$

$$\frac{29}{30}N+\frac{1}{3}+t=58$$

$$t=57\frac{2}{3}-\frac{29}{30}N$$

$$0<57\frac{2}{3}-\frac{29}{30}N\le\frac{4}{5}$$

$$56\frac{13}{15}\le\frac{29}{30}N<57\frac{2}{3}$$

$$58\frac{24}{29}\le N<59\frac{19}{29}$$

Получаем, что N=59, $t=57\frac{2}{3}-\frac{29}{30}\cdot 59=\frac{19}{30}$.

Расстояние, пройденное поездом, $N\cdot 48+t\cdot 60=59\cdot 48+\frac{19}{30}\cdot 60=2870$.

Ответ: 2870 км.

5. Вычислить $f(2)$, если $25f\left(\frac{x}{1580}\right)+\left(3-\sqrt{34}\right)f\left(\frac{1580}{x}\right)=2017x$. Ответ округлить до целого числа.

Решение: Сделаем замену: t=$\frac{x}{1580}$, тогда уравнение примет вид:

$$25f(t)+\left(3-\sqrt{34}\right)f\left(\frac{1}{t}\right)=2017\cdot 1580\cdot t \quad (1),$$

вместо t подставим в уравнение $\frac{1}{t}$, получим

$$25f\left(\frac{1}{t}\right)+\left(3-\sqrt{34}\right)f(t)=2017\cdot 1580\cdot \frac{1}{t} \quad (2).$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 25f(t)+\left(3-\sqrt{34}\right)f\left(\frac{1}{t}\right)=2017\cdot 1580\cdot t \\ 25f\left(\frac{1}{t}\right)+\left(3-\sqrt{34}\right)f(t)=2017\cdot 1580\cdot \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25^2 f(t)+25\left(3-\sqrt{34}\right)f\left(\frac{1}{t}\right)=25\cdot 2017\cdot 1580\cdot t \\ \left(3-\sqrt{34}\right)^2 f(t)+25\left(3-\sqrt{34}\right)f\left(\frac{1}{t}\right)=2017\cdot 1580\cdot\left(3-\sqrt{34}\right)\cdot \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\left(25^2-\left(3-\sqrt{34}\right)^2\right)f(t)=25\cdot 2017\cdot 1580\cdot t-2017\cdot 1580\cdot\left(3-\sqrt{34}\right)\cdot\frac{1}{t}$$

$$f(t)=\frac{2017\cdot 1580\left(25t-\left(3-\sqrt{34}\right)\cdot\frac{1}{t}\right)}{\left(25^2-\left(3-\sqrt{34}\right)^2\right)}, \quad \text{тогда}$$

$$f(2)=\frac{2017\cdot 1580\left(50-\left(3-\sqrt{34}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(25^2-\left(3-\sqrt{34}\right)^2\right)}=\frac{2017\cdot 1580\cdot\left(97+\sqrt{34}\right)}{2\cdot\left(582+6\sqrt{34}\right)}=\frac{2017\cdot 1580}{2\cdot 6}$$

$$f(2)=\frac{2017\cdot 395}{3}=265571\frac{2}{3}\approx 265572.$$

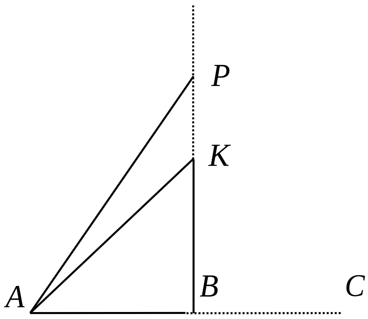
Ответ: 265572.

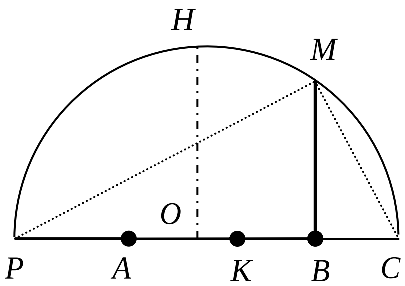
6. На плоскости дан отрезок длиной 1 см. С помощью циркуля и линейки постройте на этой плоскости отрезок длиной $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ см.

Решение: Отложим на прямой АС единичные отрезки АВ и ВС. Постоим с помощью циркуля и линейки серединный перпендикуляр РВ к отрезку АС. Отложим на нем единичный отрезок ВК и соединим точки А и К. Длина отрезка АК=$\sqrt{2}$. Отложим на прямой РК отрезок РК=АК и соединим точки А и Р. Длина отрезка ВР=$\sqrt{3}$.

На следующем рисунке показано построение отрезка МВ=$\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$:

- Отложим последовательно на прямой отрезки РА, АК, КВ и ВС с длинами $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1 и 1, соответственно.
- Построим серединный перпендикуляр НО к отрезку РС.
- Проведем окружность с центром в точке О и радиусом ОР.
- Построим серединный перпендикуляр МВ к отрезку КС.
- По свойству прямоугольного треугольника РМС, МВ=$\sqrt{PB\cdot BC}$.





7. Папа на машине вез сына на занятие в математическом кружке. По дороге их обогнали 4 автомобиля. Сын признался отцу, что смог запомнить только номера двух наименьших из них – это 119 и 179, а в других точно была цифра 3. Папа же успел запомнить все, но сыну задал следующую задачу. Если номера разбить на пары и в каждой паре их перемножить, а затем сложить полученные два числа, то получится число 105080. Помогите сыну вспомнить два оставшихся номера. (Все автомобильные номера трехзначные числа).

Решение: Пусть х и у номера двух оставшихся автомобилей. Тогда возможны два варианта.

1-й вариант. $xy+119\cdot179=105080 \Rightarrow xy=83779=199\cdot421$- это два простых сомножителя, поэтому других трехзначных сомножителей нет. Но в этом варианте нет ни одной цифры 3.

2-й вариант. $119x+179y=105080$- это Диофантово уравнение. Решим его.

Для начала найдем какое-нибудь решение в целых числах уравнения $119x+179y=1$. Это $x=-3, y=2$. Следовательно, одно из решений исходного уравнения $x=-315240,$ $y=210160$, а общее решение $x=179t-315240,$ $y=210160-119t$, где $t\in Z$. Подберем $t\in Z$, чтобы x и y стали трехзначными натуральными числами. Это будет при $t=1762,1763,1764,1765$. Получаются 4 вариантов пар трехзначных номеров: $x=158, y=482;$ $x=337, y=363;$ $x=516, y=244;$ $x=695, y=125.$ Условию задачи удовлетворяет только один вариант.

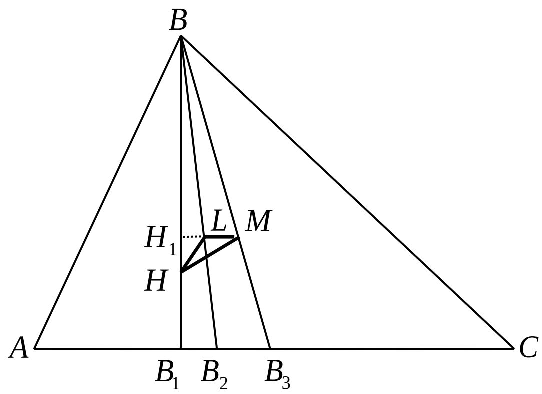
Ответ: 337, 363.

8. В треугольнике ABC со сторонами 13, 14 и 15 см. H, M и L – точки пересечения его высот, медиан и биссектрис, соответственно. Найдите площадь треугольника HML.

Решение:

Пусть AB=13см, BC=15см, AC=14см, BB_1- высота, BB_2-биссектриса, BB_3-медиана. По свойству биссектрисы треугольника – она всегда между высотой и медианой. Так как AC<BC, то BB_1 лежит внутри.

Пусть r-радиус вписанной окружности.



Воспользуемся тремя свойствами:

1. $BM:MB_3=2:1$;
2. $BL:LB_2=BH_1:H_1B_1=(BB_1-r):r=(2S_{ABC}/r-AC):AC=(P_{ABC}-AC):AC=(AB+BC):AC=28:14$;
3. $BH/(2R)=\cos\angle B=BA_1:BA=BC_1:BC$, где AA_1 и CC_1 – оставшиеся высоты треугольника ABC.

Из 1 и 2 следует, что $LM \parallel AC \Rightarrow LM=\frac{2}{3}B_2B_3$ и $LM\perp BB_1 \Rightarrow S_{HML}=\frac{1}{2}LM\cdot HH_1$, где

$BH_1=\frac{2}{3}BB_1$.

По формуле Герона $S_{ABC}=\sqrt{21\cdot 7\cdot 8\cdot 6}=84 \Rightarrow BB_1=2S_{ABC}:AC=12 \Rightarrow BH_1=8$.

По следствию из теоремы косинусов

$$Cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{169+1\cdot 29}{390}=\frac{198}{390}=\frac{33}{65}.$$

По формуле площади треугольника $R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{336}=\frac{65}{8}$.

Итак $BH=\frac{65}{4}\cdot\frac{33}{65}=\frac{33}{4}\Rightarrow HH_1=BH-BH_1=\frac{33}{4}-8=\frac{1}{4}$. По свойству биссектрисы

$$AB_2:B_2C=AB:BC\Rightarrow AB_2=6,5\Rightarrow B_2B_3=0,5AC-AB_2=7-6,5=0,5\Rightarrow$$
$$LM=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{HML}=\frac{1}{24}.$$

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	10	10	10	10	15	15	15	15	100

Задача 1

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением одной граничной точки.
4	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением нескольких граничных точек.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку (ошибку при округлении)
5	Задача верно сведена к решению системы уравнений.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
5	Верно построены отрезки длиной $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ из 1.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
8	Рассмотрен только один из двух вариантов.
4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано. Например, не доказано, что высота внутри треугольника.
8	Доказано, что $LM \parallel AC$.

4	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.