

**Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2016 г.**

8 КЛАСС

1. Решите неравенство $7 - 6(7 - 6(7 - \dots - 6(7 - 6x))) > x$, если известно, что количество правых скобок 2016.

(20 баллов)

2. Часовая и минутная стрелки образовали тот же угол, что и 25 минут назад. Найдите этот угол.

(15 баллов)

3. Докажите, что число $11^{8n+4} + 4$ составное.

(20 баллов)

4. В выпуклом четырёхугольнике ABCD стороны BC и AD параллельны, а стороны AB и CD не параллельны, биссектриса угла ABC пересекает отрезок MN, (соединяющий середины не параллельных сторон) в точке E, а основание AD в точке F. Найти величину угла AEF.

(15 баллов)

5. Сумма двух натуральных чисел равна 2116. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число. Найти все такие числа

(15 баллов)

6. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Бориса, Семёна и Василия, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

- 1) Семён самый высокий;
- 2) играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
- 3) играющие на скрипке и флейте и Борис любят борщ;
- 4) когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Семён мирит их;
- 5) Борис не умеет играть ни на гобое, ни на трубе.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

(15 баллов)

Решение задач заочного тура, 8 класс.

Задача 1. **Ответ:** $x < 1$.

1). Заметим, что $x=1$ обеспечивает равенство левой и правой частей неравенства. 2). При $x < 1$: $7 - 6(7 - 6x) < 1$ (1 скобка); $7 - 6(7 - 6(7 - 6x)) > 1$ (2 скобки) и т. д.

Значит, при четном количестве скобок левая часть больше 1 при x меньшем 1 и все x , меньшие 1, являются решениями

3). Пусть $x > 1$: Тогда $7 - 6x < 1$; $7 - 6(7 - 6x) > 1$ (1 скобка); $7 - 6(7 - 6(7 - 6x)) < 1$ (2 скобки) и т. д. Следовательно, $x > 1$ при четном количестве скобок решениями не будут.

Задача 2. **Ответ:** $68,75^\circ$ или $111,25^\circ$.

25 минут = $5/12$ часа $\Rightarrow 5/12 \cdot 360^\circ = 150^\circ$. Значит за 25 минут минутная стрелка повернется на 150 градусов, а часовая на $150/12 = 25/2 = 12,5^\circ$ (т.к. движется в 12 раз медленнее).

Возникает два случая:

1) минутная стрелка может обогнать часовую, тогда

$$2\alpha + 12,5^\circ = 150^\circ \Rightarrow \alpha = (150^\circ - 12,5^\circ) : 2 = 68,75^\circ.$$

2) минутная стрелка не обгонит часовую, тогда

$$2\alpha - 12,5^\circ + 150^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = (210^\circ + 12,5^\circ) : 2 = 111,25^\circ.$$

Задача 3. **Ответ:** $(11^{4n+2} + 2 - 2 \cdot 11^{2n+1})(11^{4n+2} + 2 + 2 \cdot 11^{2n+1})$.

Пусть

$$11^{2n+1} = x \Rightarrow x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (4x^2) = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Задача 4. Ответ: 90 градусов.

1) ABCD - трапеция. MN - средняя линия (доказать).

2) Так как BF биссектриса, то углы ABF и BFA равны, и, следовательно, треугольник ABF равнобедренный. MN средняя линия следовательно, BE=EF и, значит, AE – медиана, а значит, и высота, поэтому угол AEF равен 90 градусов.

Задача 5. Ответ: 192; 1924.

Пусть x и y эти числа, причём $x > y \Rightarrow x = 10y + k$, где $0 \leq k \leq 9 \Rightarrow x + y = 10y + k + y = 11y + k = 2116$ (k - остаток от деления числа 2116 на 11) $\Rightarrow 11y + k = 2116 \Rightarrow y = 192; x = 1924$.

Задача 6. Ответ. Борис играет на альте и кларнете, Семён – на флейте и гобое, Василий – на скрипке и трубе.

1. Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют.

2. Борис не умеет играть скрипке, флейте, гобое, трубе (это следует из условий 3 и 5). Следовательно, инструменты Бориса - альте и кларнет. (ставим единицы и нули в нужные ячейки строки «Борис», а оставшиеся ячейки столбцов «Альт» и «Кларнет» заполняем нулями.) Семён не играет на трубе (это следует из условия 4). (Ставим «0» в ячейку «Семён», «Труба»).

Музыкант	Музыкальный инструмент					
	Скрипка	Флейта	Альт	Кларнет	Гобой	Труба
Борис	0	0	1	1	0	0
Семён			0	0		0
Василий			0	0		

3. Из таблицы видно, что на трубе может играть только Василий. (Ставим «1» в ячейку «Василий», «Труба».) Семён - не скрипач (это следует из условий 1 и 2). (Ставим «0» в ячейку «Семён», «Скрипка».) Так как на скрипке не играет ни Борис, ни Семён, то скрипачом является Василий. (Ставим «1» в ячейку «Василий», «Скрипка».) Оба инструмента, на которых играет Василий, теперь определены. (Поэтому остальные ячейки строки «Василий» можно заполнять нулями).

Музыкант	Музыкальный инструмент					
	Скрипка	Флейта	Альт	Кларнет	Гобой	Труба
Борис	0	0	1	1	0	0
Семён	0		0	0		0
Василий	1	0	0	0	0	1

4. Из таблицы видно, что на флейте и гобое играть может только Семён.

Критерии проверки

Задание	1	2	3	4	5	6
Баллы	20	15	20	15	15	15

Задача 1.

Баллы	
20	полное обоснованное решение
15	арифметическая ошибка при разборе случаев
10	рассмотрены не все случаи
5	отмечена роль единицы
0	нет продвижений

Задача 2.

Баллы	
15	полное решение
10	рассмотрены оба случая, но есть арифметическая ошибка
5	верно рассмотрен только один случай

Задача 3.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи
10	Выражение разложено на множители верно, решение содержит арифметическую ошибку или задача решалась другим способом, в целом верно и содержит арифметическую ошибку в конце
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи
10	Получен правильный ответ, но не доказано, что четырёхугольник - трапеция или что MN- средняя линия
5	Ответ не получен, но доказано, что четырёхугольник - трапеция или что MN- средняя линия
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям

Задача 5.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи
10	Уравнения составлены верно, решение содержит арифметическую ошибку
5	Ответ не обоснован
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям

Задача 6.

Баллы	
15	полное решение
10	в целом верно, но не проверена какая-то одна из возможностей
5	наблюдаются отдельные догадки