Решение заданий для 8 класса. Вариант 1. Вариант 2.

Задача 1. (Вариант 1). Докажите, что при любом натуральном *n*, $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n+4$.

Доказательство: Выделим полный квадрат: $(n+4)^2 - 1.$ Одно слагаемое суммы делится на $n+4$, а другое-нет, значит, сумма не делится на $n+4$.

Задача 1. (Вариант 2). Докажите, что при любом натуральном *n*, $n^2 + 6n + 8$ не делится на $n+3$.

Доказательство: Выделим полный квадрат: $(n+3)^2 - 1.$ Одно слагаемое суммы делится на $n+3$, а другое-нет, значит, сумма не делится на $n+3$.

Задача 2. (Вариант 1). Дан остроугольный треугольник ABC (AB= BC) и BC=12. $AN \perp BC.$ На боковой стороне BC, отмечена точка M (M лежит между B и N) так, что AN = M N и $\angle$BA M =$\angle$NAC. Найти BN.

Решение: 1). Пусть$\angle$ BAM =$\angle$NAC=α, $\angle$MAN=$\angle$AMN=$\beta = 45^\circ$, (так как треугольник MAN равнобедренный) <=> $\angle$MAC=$\alpha + \beta$ и $\angle$MCA=$2\alpha + \beta$ =>

$(\triangle AMC)$ $2\beta + \alpha + 2\alpha + \beta = 180^o$ => $\alpha + \beta = 60^o$ => $\angle$MAC=60^o и $\angle$MAN=45° =>
$\angle$NAC = 15°.

2) $\angle$BA M =$\angle$NAC = 15° => $\angle$BA N = 60°.

3) $(\triangle ABN)$: AB= BC=12. $\angle$A=60°, $\angle$N=90°, $\angle$B=30° =>BN=$6\sqrt{3}$.

Ответ: $BN=6\sqrt{3}$.

Задача 2. (Вариант 2). Дан равнобедренный треугольник *ABC* (*AB*= *BC*) на боковой стороне *BC,* отмечены точки M и N (M лежит между B и N) так, что AN = M N и $\angle$BA M =$\angle$NAC. M F – расстояние от точки M до прямой AC. Найти$\angle$AMF.

Решение: Пусть$\angle$ BA M =$\angle$NAC=α, $\angle$MAN=$\angle$AMN=β <=> $\angle$MAC=$\alpha + \beta$ и$\angle$MCA=$2\alpha + \beta$ => $(\triangle AMC)$

$$2\beta + \alpha + 2\alpha + \beta = 180^o \Rightarrow \alpha + \beta = 60^o \Rightarrow \angle MAF = 60^o \Rightarrow \angle AMF = 30^o.$$

Ответ: 30°

Задача 3. (Вариант 1)

Робот-уборщик движется с постоянной скоростью и запрограммирован так, что через каждые 15 секунд поворачивает на 90 градусов, а между поворотами движется по прямой линии. Можно ли ожидать появления робота в исходной точке через 6 минут?

Решение: Количество горизонтальных отрезков, по которым робот движется в течение 15 сек., удаляясь от исходного положения, равно количеству горизонтальных отрезков, по которым он движется, приближаясь к исходному положению (легко увидеть, если нарисовать схему движения, удовлетворяющую условиям). Тогда количество горизонтальных отрезков четно. Аналогично, количество вертикальных отрезков четно. К тому же, любому продвижению по горизонтали соответствует одно продвижение по вертикали, значит горизонтальных и вертикальных отрезков поровну, и общее количество отрезков движения делится на 4. 15 сек · 4 = 60 сек. Значит, возвращения робота в исходное положение можно ожидать через любое целое количество минут.

Ответ: возвращения робота в исходное положение можно ожидать через любое целое количество минут

Задача 3. (Вариант 2)

Тридцати смышленым школьникам из 6а, 7а, 8а, 9а, 10а классов поручили составить сорок задач для олимпиады. Любые два одноклассника придумали одинаковое количество задач, а любые два ученика разных классов - разное количество. Сколько человек придумали по одной задаче?

Решение: 26 одноклассников по 1 задаче, 27-й человек-2, 28-й-3, 29-й -4. 30-й -5. Это решение видно сразу. Докажем, что по-другому быть не может.

Пусть x – человек решили одну задачу, y - две, z - три, q - четыре, r - пять задач. По условию задачи x, y, z, q, r не меньше единицы. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4q + 5r = 40, \\ x + y + z + q + r = 30; \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе: $y + 2z + 3q + 4r = 10$, это равенство в условиях нашей задачи может достигаться только при $y = z = q = r = 1$, значит, $x = 26$.

Ответ: 26 человек.

Задача 4. (Вариант 1)

Обозначим *min(a;c)* наименьшее из чисел a и c. Постройте график функции $y = \min(x + 2; x^2 - 6x + 8)$, и с его помощью решите неравенство $\min(x + 2; x^2 - 6x + 8) \geq 0.$

Решение: 1) Найдём точки пересечения графиков $y = x + 2$, $y = x^2 - 6x + 8$, получим x=1 и x=6: при $x \in (-\infty;1) \cup (6;+\infty)$ наименьшее $y = x + 2$; при $x \in [1;6]$ наименьшее из чисел а и с $y = x^2 - 6x + 8$; 2) Найдём точки пересечения графиков с осью ох, получим x=-2, x=2 и x=4; 3) По графику определим решение неравенства $x \in [-2;2] \cup [4;+\infty)$.

Ответ: $x \in [-2;2] \cup [4;+\infty)$.

Задача 4. (Вариант 2)

Обозначим *max(a;c)* наименьшее из чисел а и с. Постройте график функции $y = \max(x - 11; x^2 - 8x + 7)$, и с его помощью решите неравенство $\max(x - 11; x^2 - 8x + 7) \prec 0$.

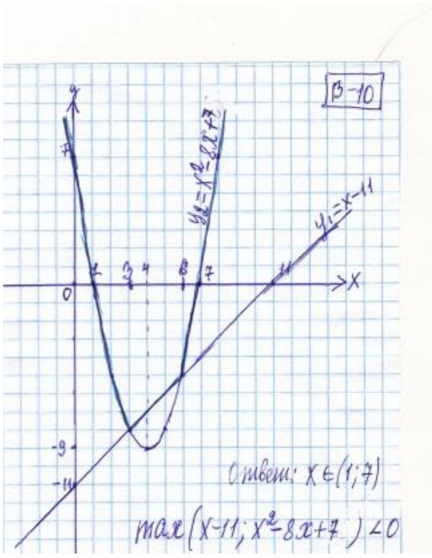
Решение:

1) Найдём точки пересечения графиков $y = x - 11$, $y = x^2 - 8x + 7$, получим x=3 и x=6: при $x \in (-\infty;3) \cup (6;+\infty)$ наибольшее $y = x^2 - 8x + 7$;

при $x \in [3;6]$ наибольшее из чисел а и с $y = x - 11$;

2) Найдём точки пересечения графиков с осью ох, получим x=1 и x=7;

3) По графику определим решение неравенства $x \in (1;7)$.



Ответ: $x \in (1;7)$.

Задача 5. (Вариант 1).

Найдите вид всех квадратных трехчленов $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – заданные постоянные, $a \neq 0$, таких, что для всех значений x выполняется условие $f(3{,}8x - 1) = f(-3{,}8x)$.

Решение:

$y(0,01x+1)=y(-0,01x) \prec\!=\!\succ y(1)=y(0) \prec\!=\!\succ a+b+k=k \prec\!=\!\succ a+b=0 \prec\!=\!\succ$
$b=-a \prec\!=\!\succ y(x)=ax^2-ax+k.$

Проверка: $y(0,01x+1)=y(-0,01x) \prec\!=\!\succ$

$a(0,01x+1)^2-a(0,01x+1)+k=a(-0,01x)^2-a(-0,01x)+k$

$\prec\!=\!\succ 0,0001ax^2+0,02ax+a-0,01ax-a=0,0001ax^2+0,01ax \prec\!=\!\succ$ 0=0.

Ответ: $y(x)=ax^2-ax+k.$

Задача 5. (Вариант 2).

Найдите вид всех квадратных трехчленов $f(x)=ax^2+bx+c,$ где a,b,c – заданные постоянные, $a\neq 0$, таких, что для всех значений x выполняется условие $f(3,8x-1)=f(-3,8x).$

Решение:

$f(3,8x-1)=f(-3,8x) \prec\!=\!\succ f(-1)=f(0) \prec\!=\!\succ a-b+c=c \prec\!=\!\succ a-b=0 \prec\!=\!\succ b=a$
$\prec\!=\!\succ f(x)=ax^2+ax+c.$

Проверка: $f(3,8x-1)=f(-3,8x) \prec\!=\!\succ$

$a(3,8x-1)^2+a(3,8x-1)+c=a(-3,8x)^2+a(-3,8x)+c$

$\prec\!=\!\succ 14,44ax^2-7,6ax+a+3,8ax-a=14,44ax^2-3,8ax \prec\!=\!\succ$ 0=0.

Ответ. $f(x)=ax^2+ax+c.$

Задача 6. (Вариант 1).

Докажите, что выражение $x^5-4x^4y-5y^2x^3+20y^3x^2+4y^4x-16y^5$ не равно 77 ни при каких целых значениях x и y.

Решение:

Разложим на множители.

$a^4(a+3b)-5a^2b^2(a+3b)+4b^4(a+3b) \prec\!=\!\succ (a+3b)(a^4-5a^2b^2+4b^4) \prec\!=\!\succ$
$(a+3b)(a-2b)(a+2b)(a-b)(a+b).$ Эти 5 сомножителей попарно различны, что необходимо и нетрудно проверить. Однако число 55 можно разложить максимум на 4 различных целых сомножителя, например: $1\cdot(-1)\cdot 5\cdot(-11).$

Задача 6. (Вариант 2).

Докажите, что выражение $x^5-4x^4y-5y^2x^3+20y^3x^2+4y^4x-16y^5$ не равно 77 ни при каких целых значениях x и y

Решение:

Разложим на множители $x^4(x-4y)-5x^2y^2(x-4y)+4y^4(x-4y) \prec=\succ (x-4y)(x^4-5x^2y^2+4y^4)$ $\prec=\succ (x-4y)(x+2y)(x-2y)(x-y)(x+y).$Необходимо проверить, что множители попарно различны. Они могут совпадать при $y=0.$ Но x^5ни при каких целых значениях переменной не равно 77. При этом число 77 может быть разложено в произведение максимум четырех различных сомножителей, например, $1\cdot(-1)\cdot 7\cdot(-11).$

Критерии проверки заданий

Задача 1.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка
5	Выделен полный квадрат, но нет дальнейших объяснений.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка
5	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Недостатки обоснования при верном ходе решения.
5	Есть схема движения с отдельными выводами.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 4.

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка
8	Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки, указаны координаты точек удовлетворяющие условию задачи.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка
10	Решение получено с использованием частных случаев, но ответ верный.
8	Приведены примеры квадратных трехчленов, удовлетворяющих условию задачи.
2	Наблюдаются отдельные догадки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ - общие верные рассуждения, разложено на множители числа 55 и доказано, что сомножители попарно различны.
15	Общие верные рассуждения, число 55 разложено на множители, но не доказано, что сомножители попарно различны.
10	Выражение разложено на множители.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.