«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Председатель Оргкомитета
Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
_________________ А.А. Александров
«____» __________ 201__г.

Типовой вариант академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее»

по общеобразовательному предмету «Математика»

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Доехав до пункта B менее чем за один час, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\log_x(16-24x+9x^2)<0$ (8 баллов)

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $300x^2-61xy+3y^2+7=0$ и являются соответственно третьим и восьмым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$

(8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{(2\cdot 2^{-\log_x 3}-4)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{1+\sqrt{\log_x 3+5}}>\dfrac{(2^{-\log_x 3}-2)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{\sqrt{\log_x 3+5}-2}$

(10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1\big/g(16g(g(\ln x))/65)$, где $g(x)=x^3+1\big/x^3$

(10 баллов)

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=4$, $BK=9$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$. (10 баллов)

8. На прямой $x=\sqrt{3}\big/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2\big/2$, угол между которыми равен $60°$. (12 баллов)

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $y-2=a(x-4)$, $2x\Big/\left(|y|+y\right)=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA = 4,\ TB = 12,\ TC = 3$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит? (12 баллов)

Решения типового варианта

1. Пусть x (км/ч) - скорость пешехода, y (км/ч) – первоначальная скорость велосипедиста, t (ч) – время, затраченное велосипедистом на путь от A до B. Тогда

$$\begin{cases} x(t+0{,}2)+0{,}4y=12, \\ yt=12, \\ t<1, \end{cases} \Rightarrow\ x(12/y+0{,}2)+0{,}4y=12,\ \Rightarrow\ 2y^2+(x-60)y+60x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D=(x-60)^2-480x\ge 0.$ Следовательно, $x^2-600x+3600\ge 0$, $D/4=\left(120\sqrt{6}\right)^2$,

$$x\in(-\infty;\,300-120\sqrt{6}]\cup[300+120\sqrt{6};\,+\infty).$$

Поскольку по условию $x\in N$, и $0{,}2x<12$, т.е. $x<60$, то $x\in[1;\,300-120\sqrt{6}]\cap N$. Используя оценку $2{,}44<\sqrt{6}<2{,}45$, получаем оценку $293<120\sqrt{6}<294$, и $6<300-120\sqrt{6}<7$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=6$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=6$ из уравнения $2y^2-54y+360=0,$ или $y^2-27y+180=0,$ $y_1=12,$ $y_2=15.$ Поскольку $t<1,$ $t=\dfrac{12}{y}<1,$ и $y>12,$ то $y=15.$ **Ответ:** 6 км/ч, 15 км/ч.

2. $\log_x(16-24x+9x^2)<0$. ОДЗ: $x>0,\quad x\ne 1,\quad x\ne 4/3$.

1) $0<x<1;\quad 16-24x+9x^2>1 \Leftrightarrow 3x^2-8x+5>0;\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>5/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<1; \\ 0<x<1 \end{cases}$

2) $x>1,\quad x\ne 4/3;\ 16-24x+9x^2<1 \Leftrightarrow 3x^2-8x+5<0 \Leftrightarrow 1<x<5/3,\ x\ne 4/3$.

Ответ: $x\in\left(0;1\right)\cup\left(1;4/3\right)\cup\left(4/3;5/3\right)$.

3. Разложим на множители выражение $300x^2-61xy+3y^2$.

При $y\ne 0$ имеем $y^2\left(300\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-61\left(\dfrac{x}{y}\right)+3\right)=300y^2\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{3}{25}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{12}\right)=(25x-3y)(12x-y)$.

Эта формула верна и для всех действительных чисел y. По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(25x-3y)(12x-y)=-7$. Целые числа $25x-3y$ и $12x-y$ являются делителями числа -7, причем возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} 25x-3y=-7, \\ 12x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25x-3y=7, \\ 12x-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 25x-3y=-1, \\ 12x-y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 25x-3y=1, \\ 12x-y=-7. \end{cases}$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части второго уравнения системы на -3 и складываем с первым:

1) $\begin{cases} -11x=-10, \\ 12x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -11x=10, \\ 12x-y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -11x=-22, \\ 12x-y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -11x=22, \\ 12x-y=-7. \end{cases}$

Системы 1) и 2) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x<y$, этому условию удовлетворяют решения системы 4): $x=-2$, $y=-17$. Таким образом, $a_3=-2,\ a_8=-17$, или $a_1+2d=-2$, $a_1+7d=-17$. Отсюда получаем $d=-3$.

Ответ: $d=-3$.

4. $\dfrac{2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$.

При условии $\sin x-\cos x>0$ находим корни уравнения

$2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-\cos 6x-\cos 10x+2=0 \Leftrightarrow$

$2\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 3x\sin 5x-1+2\sin^2 3x-1+2\sin^2 5x+2=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^4 8x+2(\sin 3x+\sin 5x)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 8x=0, \\ \sin 3x+\sin 5x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \sin 4x=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8},\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ x=\dfrac{\pi l}{4},\ l\in Z, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi l}{4},\ l\in Z.$$

С учетом условия $\sin x-\cos x>0$ окончательно имеем $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

5. $\dfrac{(2\cdot 2^{-\log_x 3}-4)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{1+\sqrt{\log_x 3+5}} > \dfrac{(2^{-\log_x 3}-2)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+2}}}{\sqrt{\log_x 3+5}-2}$

Сделаем замену переменной $y=\log_x 3$.

$$\frac{(2\cdot 2^{-y}-4)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}}{1+\sqrt{y+5}} > \frac{(2^{-y}-2)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}}{\sqrt{y+5}-2} \Leftrightarrow$$

$$(2^{-y}-2)\left(\frac{2}{1+\sqrt{y+5}}-\frac{1}{\sqrt{y+5}-2}\right)\sqrt{2-\sqrt{y+2}}>0.$$

Найдем ОДЗ: $y\ge -5$, $y\ne -1$, $2-\sqrt{y+2}\ge 0 \Rightarrow -2\le y\le 2$.

Поскольку неравенство строгое, то при $-2\le y<2,\ y\ne -1$, неравенство равносильно следующему:

$$(-y-1)\left(\frac{2}{1+\sqrt{y+5}}-\frac{1}{\sqrt{y+5}-2}\right)>0, \text{ или } (y+1)\left(\frac{\sqrt{y+5}-5}{(1+\sqrt{y+5})(\sqrt{y+5}-2)}\right)<0,$$

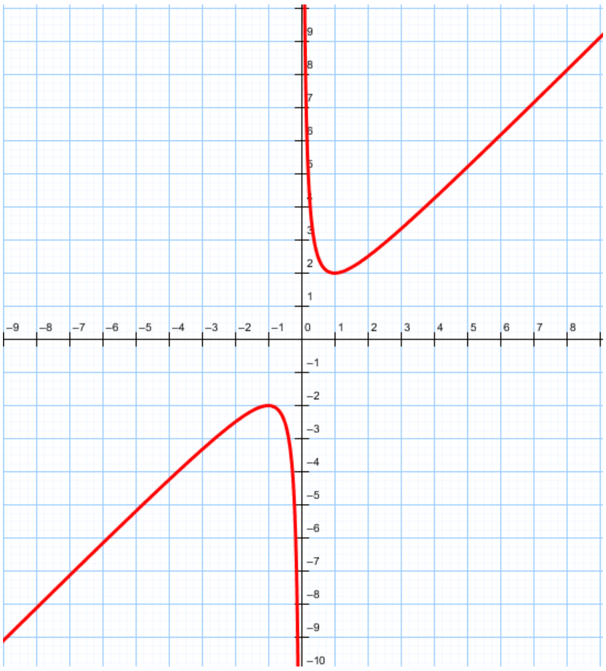
или $\dfrac{(y+1)(y-20)}{(y+1)}<0$, или $y<20$.

Таким образом, $-2\le y<-1$ или $-1<y<2$. Производя обратную замену, получаем:

$$\begin{cases}\log_x 3\ge -2,\\ \log_x 3<2,\\ \log_x 3\ne -1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+2\log_3 x}{\log_3 x}\ge 0,\\ \dfrac{1-2\log_3 x}{\log_3 x}<0,\\ x\ne 1/3,\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3 x>0,\\ \log_3 x\le -1/2,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<0,\\ \log_3 x>1/2,\end{array}\right.\\ x\ne 1/3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;1/\sqrt{3}]\cup(1;+\infty),\\ x\in(0;1)\cup(\sqrt{3};+\infty),\\ x\ne 1/3,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x\in(0;1/3)\cup(1/3;1/\sqrt{3}]\cup(\sqrt{3};+\infty).$$

Ответ: $x\in(0;1/3)\cup(1/3;1/\sqrt{3}]\cup(\sqrt{3};+\infty)$.



6. Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t)=t+1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t\ne 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции $\varphi(t)$: $\varphi'(t)=1-1/t^2=(t-1)(t+1)/t^2$, $\varphi'(t)=0$ при $t=\pm 1$. Проходя через точку $t=-1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t=-1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max}=\varphi(-1)=-2$. Проходя через точку $t=1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t=1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min}=\varphi(1)=2$. График функции $\varphi(t)$ представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Функция $g(x)=x^3+1/x^3=\varphi(x^3)$. Поскольку функция $t=x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(x^3)$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, причем $g_{\max}=g(-1)=-2$, $g_{\min}=g(1)=2$. По той же причине множеством значений функции $g(\ln x)$ также является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Множеством значений функции $g(g(\ln x))$ является множество $(-\infty;-65/8]\cup[65/8;+\infty)$, а функции $16g(g(\ln x))/65$ — множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Таким образом, $g(16g(g(\ln x))/65)\in(-\infty;-65/8]\cup[65/8;+\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x)=1/g(16g(g(\ln x))/65)$: $E_f=[-8/65;0)\cup(0;8/65]$.

Ответ: $E_f=[-8/65;0)\cup(0;8/65]$.

7.

1) $\angle APB=\angle BAC$, $\angle APB=\angle AKC$, $\angle AKC=\angle BAC$, $\angle KAC=\angle ABC$.

Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC\approx\Delta AKC \quad\Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK}=\frac{AC}{KC}=\frac{BC}{AC}\quad\Rightarrow\quad\frac{AB}{4}=\frac{AC}{3}=\frac{12}{AC}\quad\Rightarrow\quad AC=6,\quad AB=8.$$

2) CD - медиана $\Rightarrow$ по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем:

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC,\quad BC^2=BD^2+CD^2+2BD\cdot CD\cos\angle ADC.$$

Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(36+144) - 16 = 74,\ CD = \sqrt{74}.$$

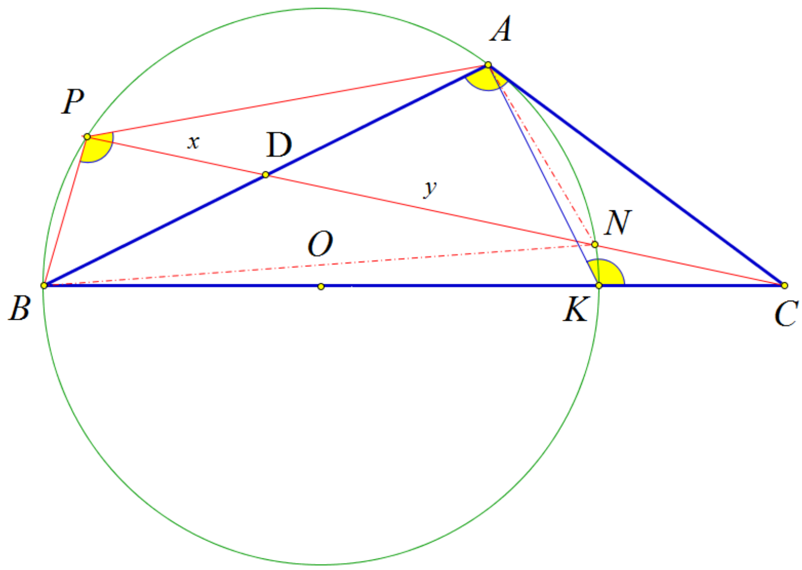
3) Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \ne P$).

Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $16 = xy$. По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2$, $(CD - y)\cdot(CD + x) = AC^2$, $(\sqrt{74} - y)\cdot(\sqrt{74} + x) = 36$.

4) Решаем систему уравнений $16 = xy$, $(\sqrt{74} - y)\cdot(\sqrt{74} + x) = 36$ $\Rightarrow y = \dfrac{22}{\sqrt{74}} + x \Rightarrow$

$x^2 + \dfrac{22}{\sqrt{74}}x - 16 = 0$, $x = \dfrac{-11 + 3\sqrt{145}}{\sqrt{74}}$, $DP = \dfrac{-11 + 3\sqrt{145}}{\sqrt{74}}$.

Ответ: $\dfrac{-11 + 3\sqrt{145}}{\sqrt{74}}$.



8. На прямой $x = \sqrt{3}/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$ (без применения производной).

$y = x^2/2$, $M\left(\sqrt{3}/2; y_0\right)$. Уравнение $\dfrac{1}{2}x^2 = y_0 + k\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, или $x^2 - 2kx + k\sqrt{3} - 2y_0 = 0$,

имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4} = k^2 - k\sqrt{3} + 2y_0 = 0$.

Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = \sqrt{3}$ (1), $k_1 \cdot k_2 = 2y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60°$, $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$.

Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}(1 + 2y_0)$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1 = -\sqrt{3}y_0$, $k_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3}y_0$. Из (2) следует $k_1 k_2 = -3y_0 - 3y_0^2 = 2y_0$,

$3y_0^2+5y_0=0$. Отсюда $(y_0)_1=0,\ (y_0)_2=-5/3$.

Ответ: $M_1\left(\sqrt{3}/2;0\right),\ M_2\left(\sqrt{3}/2;-5/3\right)$.

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$y-2=a(x-4),\qquad \frac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

ОДЗ: $y>0,\ x\ge 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x=y\sqrt{x}$.

I. $x=0,\ y=2-4a>0$, отсюда $a<\frac{1}{2}$.

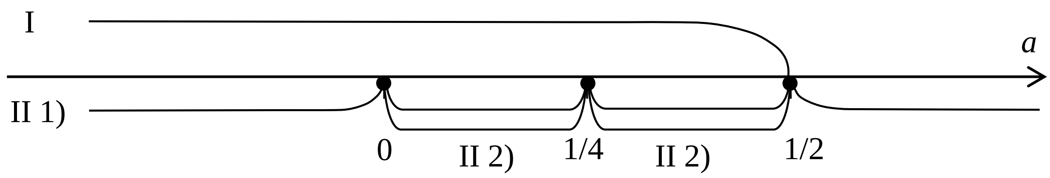
II. $x>0,\ y=\sqrt{x}$; $\sqrt{x}-2=a\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$.

1) $\sqrt{x}=2,\ x=4,\ y=2,\ a\in R$.

2) $1=a\left(\sqrt{x}+2\right),\ \sqrt{x}=\frac{1}{a}-2=\frac{1-2a}{a}>0,\ 0<a<\frac{1}{2}$.

Найденное решение $x=\left(\frac{1-2a}{a}\right)^2,\ y=\frac{1-2a}{a}$ совпадает с предыдущим, если $2=\frac{1}{a}-2,\ a=\frac{1}{4}$.

Итак, при $a\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ $x=\left(\frac{1-2a}{a}\right)^2,\ y=\frac{1-2a}{a}$.



Ответ:

$a\in(-\infty;0]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\},\ x_1=0,\ y_1=2-4a;\ x_2=4,\ y_2=2$;

$a\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right),\ x_1=0,\ y_1=2-4a;\ x_2=4,\ y_2=2;\ x_3=\left(\frac{1-2a}{a}\right)^2,\ y_3=\frac{1-2a}{a}$;

$a\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),\ x=4,\ y=2$.

10. Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB, то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS.

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA, то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS.

По построению общих перпендикуляров $KN=HT$, где $HT\perp CG$, и $ME=TD$, где $TD\perp CF$. В условиях всех вариантов $TA<TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB.

Если обозначить $TA=a,\ TB=b,\ TC=c$,

то $CF=\sqrt{(b/2)^2+c^2}$;

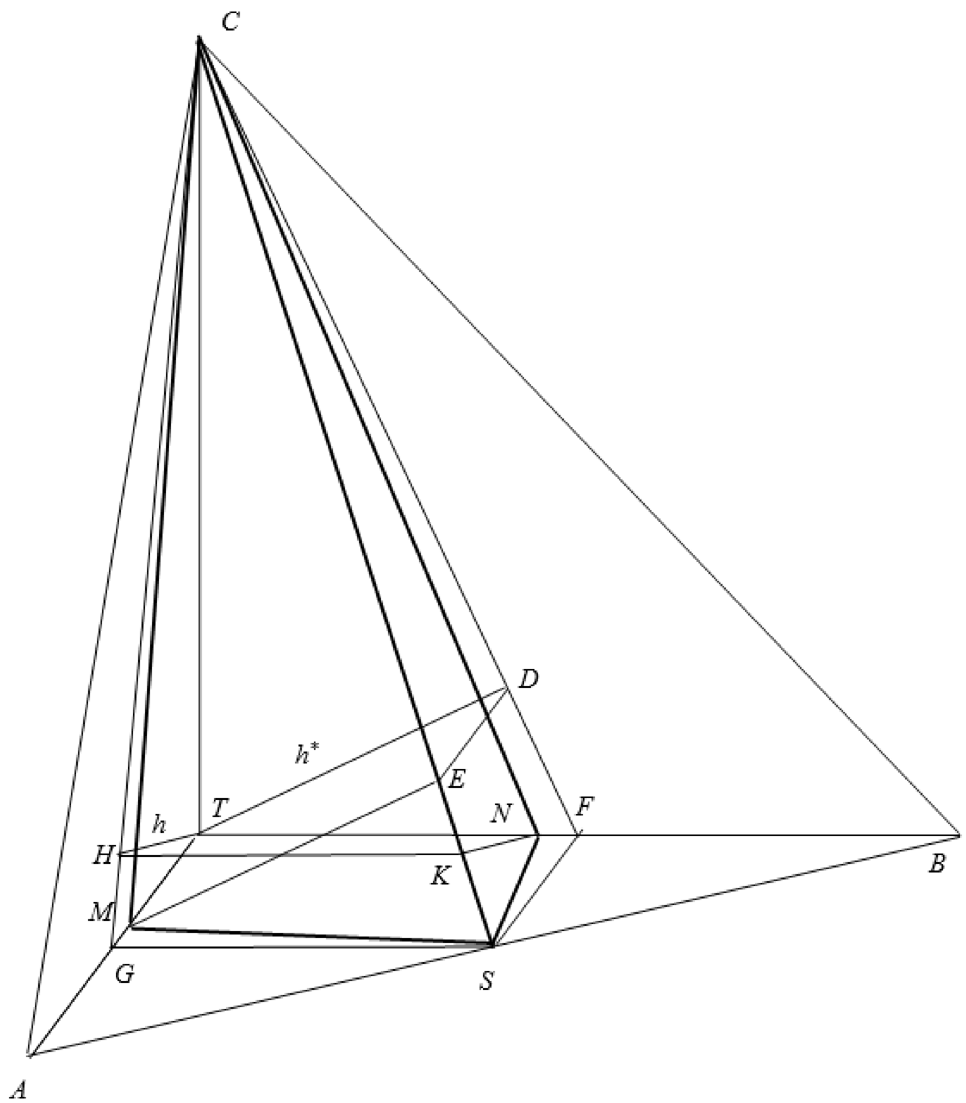
$$CS=\sqrt{TF^2+FS^2}=\sqrt{(a/2)^2+c^2+(b/2)^2}\ ,$$

$$h=HT=\frac{TC\cdot TG}{TG}=\frac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}\ .$$

$$S_{\Delta CSN}=\frac{1}{2}KN\cdot CS=\frac{ac\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2+c^2}}{2\cdot 2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}\ .$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\frac{BN}{TN}=1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}$. (*)

TA	*TB*	*TC*	*CS*	$S_{\Delta NCS}$	*BN:TN*	*BN*	*TN*
4	12	3	7	$21/\sqrt{13}$	17:9	108/13	54/13



Первый (отборочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-12}{x+4}}-\sqrt{\frac{x+4}{x-12}}<\frac{16}{15}$. (8 баллов)

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член полученной прогрессии будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую. Найдите эти числа. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+2-|x+1|}\leq x+5-|2x+3|$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(\sqrt{25-g^2(x)}\right)$, где $g(x)=||x|-2|-1$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, причем $AM=18$. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 112, а площадь равна 672. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-3$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=x^2+16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3\leq x_0\leq 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых уравнение

$$(x-a)^2-a-1=|x|/x$$

имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами $AB=24$ и $BC=30$, а боковое ребро пирамиды $TA=16$ перпендикулярно плоскости основания. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр симметрии основания O, вершину пирамиды и точку M, лежащую на стороне BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае? (12 баллов)

Решение варианта №1

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошёл половину пути, второй прошел 15 *км*, а когда второй прошёл половину пути, первый прошел 24 *км*. В пункт *B* пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами *A* и *B*?

Решение:

Пусть s – расстояние между пунктами *A* и *B*, v_1, v_2 – скорости пешеходов. Тогда $\frac{s}{2v_1}=\frac{s-15}{v_2}$ и $\frac{s-24}{v_1}=\frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)}=\frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2=4s^2-4\cdot 39s+60\cdot 24$; $s^2-52s+480=0$; $s_{1,2}=26\pm 14$. $s_1=40,\quad s_2=12$ не удовлетворяет условиям задачи $s>15,\ s>24$.

Ответ: 40 км.

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-12}{x+4}}-\sqrt{\frac{x+4}{x-12}}<\frac{16}{15}$.

Решение:

$\sqrt{\frac{x+4}{x-12}}=y>0;\ \frac{1}{y}-y<\frac{16}{15};\ 15y^2+16y-15>0;\ y_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+225}}{15}=\frac{-8\pm 17}{15}$,

$y_1=\frac{3}{5}, y_2=-\frac{5}{3}$. След. $y>\frac{3}{5}$, $\frac{x+4}{x-12}>\frac{9}{25}\Leftrightarrow\frac{x+13}{x-12}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-13,\\ x>12.\end{array}\right.$

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия обратится в арифметическую, но если затем третий член полученной прогрессии будет увеличен на 64, то она опять обратится в геометрическую. Найдите эти числа.

Решение: Пусть a, b, c - искомые числа. Тогда

$$\begin{cases} ac=b^2, \\ a+c=2(b+8), \\ a(c+64)=(b+8)^2, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ac=b^2, \\ a+c=2(b+8), \\ ac+64a=b^2+16b+64, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ac=b^2, \\ a+c=2(b+8), \\ ac+64a=b^2+16b+64, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} ac=b^2, \\ c=2(b+8)-c, \\ 64a=16b+64, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ac=b^2, \\ c=\frac{7}{4}b+15, \\ a=\frac{1}{4}b+1, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (7b+60)(b+4)=16b^2, \\ c=\frac{7}{4}b+15, \\ a=\frac{1}{4}b+1. \end{cases}$$

Приходим к квадратному уравнению: $9b^2-88b-240=0,\ \frac{D}{4}=64^2,$

$b_1=-\frac{20}{9},\quad b_2=12.$

Искомые числа: $a_1=\frac{4}{9},\quad b_1=-\frac{20}{9},\quad c_1=\frac{100}{9},$ или $a_2=4,\quad b_2=12,\quad c_2=36.$

Ответ: $a_1=\frac{4}{9},\quad b_1=-\frac{20}{9},\quad c_1=\frac{100}{9},$ или $a_2=4,\quad b_2=12,\quad c_2=36.$

4. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}=0.$

Решение:

$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}}$. При условии $\cos x\ge 0$ возводим в квадрат обе части

уравнения: $\frac{\cos^2 x}{3}=\frac{1-\cos 2x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x}{3}=\frac{2\sin^2 x-2\sin^3 x}{6\sin x-2}\Leftrightarrow\frac{1-\sin^2 x}{3}=\frac{\sin^2 x(1-\sin x)}{3\sin x-1}$

$\Leftrightarrow\ \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{3}=\frac{\sin^2 x(1-\sin x)}{3\sin x-1}\ \Leftrightarrow$

1) $\sin x=1\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ или 2) $\frac{1+\sin x}{3}=\frac{\sin^2 x}{3\sin x-1}\ \Leftrightarrow$

$\sin x\ne\frac{1}{3},\quad (1+\sin x)(3\sin x-1)=3\sin^2 x\Leftrightarrow\ \sin x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. С учетом

условия $\cos x\ge 0$ окончательно имеем $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x+2-|x+1|}\le x+5-|2x+3|.$

Решение:

$$\begin{cases} x+5-|2x+3|\ge 0,\\ x+2-|x+1|\ge 0,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2x+3|\le x+5,\\ |x+1|\le x+2,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x-5\le 2x+3\le x+5,\\ -x-2\le x+1\le x+2,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -x-8\le 2x\le x+2,\\ x\ge -1{,}5,\\ x+2-|x+1|\le \left(x+5-|2x+3|\right)^2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\le 2,\\ -8\le 3x,\\ x\ge-1{,}5,\\ x+2-|x+1|\le\left(x+5-|2x+3|\right)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1{,}5\le x\le 2\\ x+2-|x+1|\le(-x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

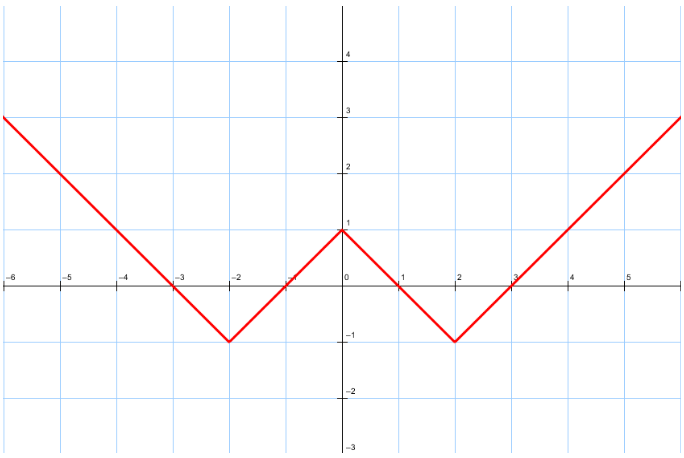
$$\begin{cases}-1{,}5\le x\le 2\\ |x+1|\ge -x^2+5x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1{,}5\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l} x+1\ge -x^2+5x-2,\\ x+1\le x^2-5x+2,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1{,}5\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3\ge 0,\\ x^2-6x+1\ge 0,\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1{,}5\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}(x-1)(x-3)\ge 0,\\ (x-3+2\sqrt{2})(x-3-2\sqrt{2})\ge 0,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in[-1{,}5;1].$$

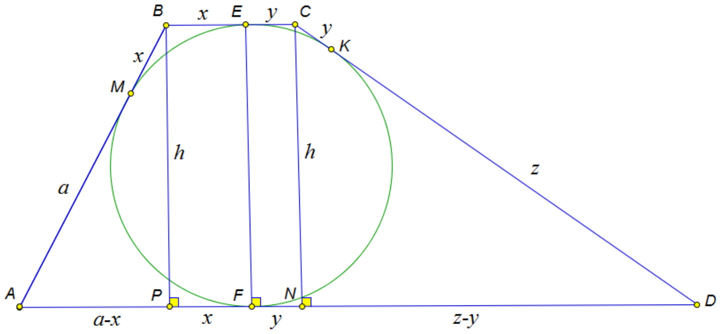
Ответ: $x\in[-1{,}5;1]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(\sqrt{25-g^2(x)})$, где $g(x)=||x|-2|-1$.

Решение: Функция $g(x)=||x|-2|-1$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $[-1;+\infty)$. График функции $g(x)$ изображен на рисунке. Функция $\phi(t)=\sqrt{25-t^2}$ определена для $t\in[-5;5]$. При $t=g(x)$ функция $\phi(t)=\sqrt{25-t^2}$ принимает свои значения при $t\in[-1;5]$, причем множество значений этой функции есть отрезок $[0;5]$. Для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[0;5]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[-1;2]$. Ответ: $E_f=[-1;2]$.



7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, причем $AM = 18$. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 112, а площадь равна 672.



Решение: M, E, K, F - точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда

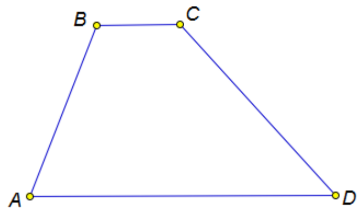
$AM = AF = a = 18$, $BM = BE = x$, $CE = CK = y$, $DK = DF = z$.

$P_{ABCD} = 2(18 + x + y + z) = 112$, $x + y + z = 38$.

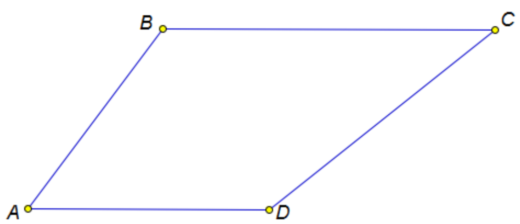
$S_{ABCD} = (18 + x + y + z) r_{вп.} =$
$(18 + x + y + z) h/2 = 672$.

Тогда $28h = 672$, $h = 24$. Пусть $BP \perp AD, CN \perp AD$. В треугольнике ABP по теореме Пифагора имеем: $h^2 + (a - x)^2 = (a + x)^2$, $h^2 = 4ax$, $x = 8$, $y + z = 30$. В треугольнике CDN по теореме Пифагора имеем: $h^2 + (z - y)^2 = (z + y)^2$, $h^2 = 4yz$, $yz = 144$. Находим y, z, решая уравнение $t^2 - 30t + 144 = 0$, $t_1 = 24, t_2 = 6$. Имеем два варианта решения: 1) $y = 6, z = 24$, 2) $y = 24, z = 6$. Окончательно получаем 1) $AB = 26$, $BC = 14$, $CD = 30$, $AD = 42$, 2) $AB = 26$, $BC = 32$, $CD = 30$, $AD = 24$.

Ответ: 1) $AB = 26$, $BC = 14$, $CD = 30$, $AD = 42$, 2) $AB = 26$, $BC = 32$, $CD = 30$, $AD = 24$.

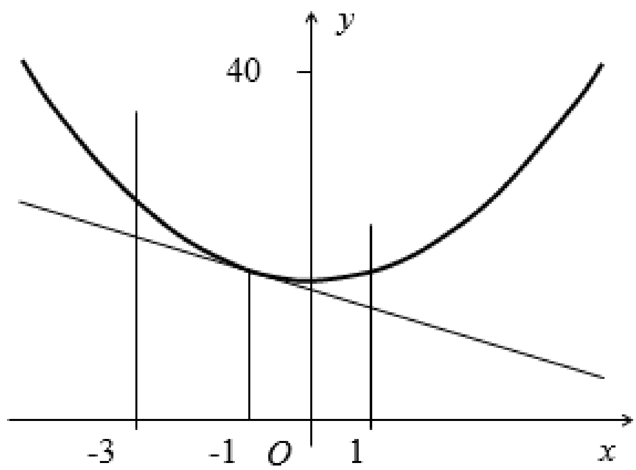


1)



2)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а



сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$?

Решение:

$y = x^2 + 16, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$.

Уравнение касательной:

$y = x_0^2 + 16 + 2x_0(x - x_0)$, или

$y = -x_0^2 + 16 + 2x_0 x$.

$y_1 = y(x_1) = -x_0^2 + 16 + 2x_0(-3)$;

$y_2 = y(x_2) = -x_0^2 + 16 + 2x_0 \cdot 1$. Так как

$\min y_1 = y_1(x_2) = -1 + 16 - 6 = 9 > 0$; $\min y_2 = y_2(x_1) = -9 + 16 - 6 = 1 > 0$, полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$S(x_0) = 0,5(y_1 + y_2)\ (x_2 - x_1) = (-x_0^2 + 16 - 2x_0)4$.

$S'(x_0) = 4(-2x_0 - 2) = 0, \quad x_0 = -1$. $\max S(x_0) = S(-1) = 4(-1 + 16 + 2) = 68$.

Ответ: 68.

9. Укажите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 = \dfrac{x}{|x|} + a + 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a.

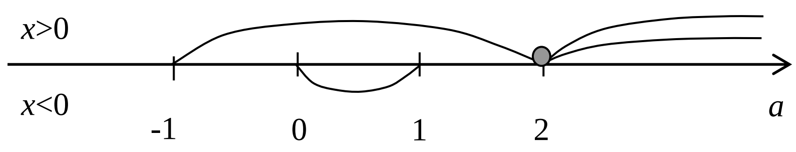
Решение:

I. При $x > 0 \quad x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*). Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, если: $\begin{cases} D/4 = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$. Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2} = a + \sqrt{a+2}$, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ a^2 - a - 2 < 0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 2 \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < a \le 2$.

II. При $x<0$ $x^2-2ax+a^2-a=0$ (**). Это уравнение не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4=a>0, \\ a<0, \\ a^2-a>0. \end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4=a=0, \\ a<0, \end{cases} \\ a^2-a<0, \quad \Leftrightarrow 0<a<1 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=1 \end{array}\right. \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2}$; при $(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ x_2=a-\sqrt{a}$;

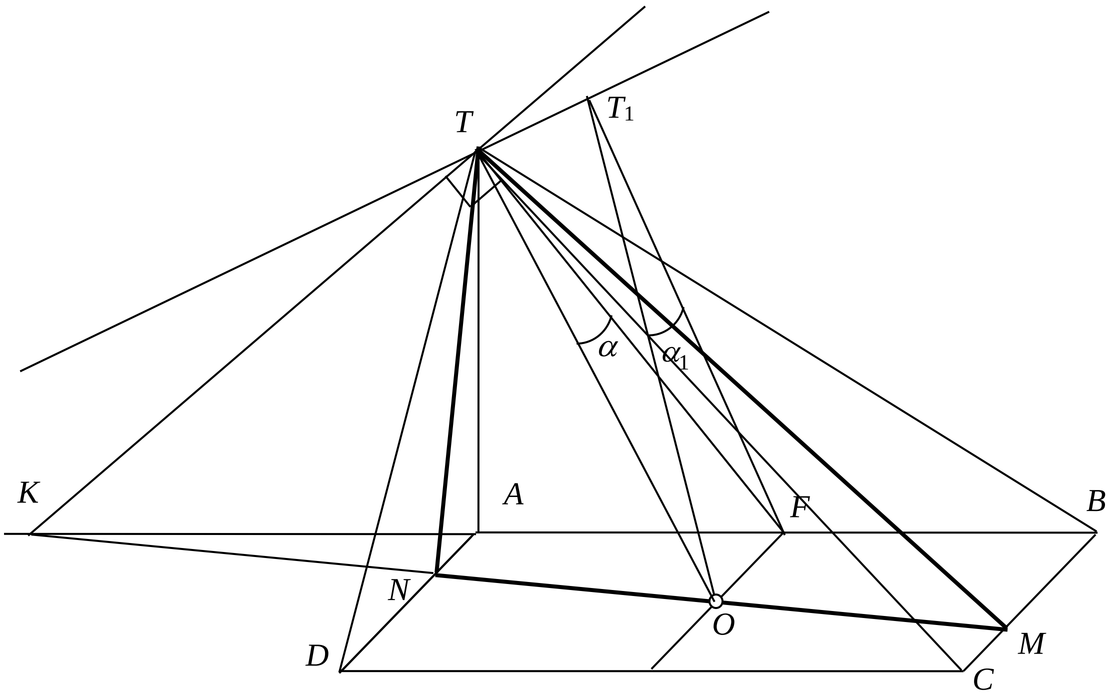
при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2}$.

10. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами $AB=24$ и $BC=30$, а боковое ребро пирамиды $TA=16$ перпендикулярно плоскости основания. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр симметрии основания O, вершину пирамиды и точку M, лежащую на стороне BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае?

Решение:

При любом положении точки M на стороне BC грань TAB является ортогональной проекцией сечения TMN. Площадь сечения будет наименьшей, если наименьшим будет угол между секущей плоскостью и гранью TAB. Так как секущая плоскость проходит через центр симметрии основания O и вершину пирамиды T, то отрезок OT является наклонной к плоскости грани TAB, и наименьшим возможным углом будет $\angle OTF$, где $OF\perp TAB,\ F\in AB$. Линия пересечения секущей плоскости и плоскости грани TAB $TK\perp TF$ и пересекает прямую AB в точке K. Если условие $TK\perp TF$ не выполнено, то $FT_1<FT,\ \mathrm{tg}\alpha_1>\mathrm{tg}\alpha,\ \cos\alpha_1<\cos\alpha$ и $\dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha_1}>\dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha}$.

Прямая, проведенная через точки K и O, пересекает ребро AD в точке N и ребро BC в точке M, ΔNTM – искомое сечение.



Если обозначить $AB = a,\ BC = b,\ TA = c$, то $TF = \sqrt{(a/2)^2 + c^2}$;

$TO = \sqrt{TF^2 + OF^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}\Big/2$, $\cos\angle OTF = \dfrac{TF}{TO} = \dfrac{\sqrt{a^2+4c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}$.

$$S_{\Delta NTM} = \frac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha} = \frac{ac\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{2\sqrt{a^2+4c^2}} = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2+c^2}}{2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}.$$

В ΔKTF $\angle KTF = 90^\circ$, $AK = AT^2\big/AF = 2c^2\big/a$. $BK = AK + AB = \dfrac{2c^2}{a} + a$.

Точка M делит отрезок BC в отношении $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{a^2+2c^2}{2c^2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$.

AB	BC	TA	TF	TO	$\cos\alpha$	S_{NTM}	$BM{:}MC$	BM	MC
24	30	16	20	25	4/5	240	17:8	102/5	48/5

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 5

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

(8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-24}}<\frac{24}{5}$. (8 баллов)

3. Три числа, сумма которых 114, являются, с одной стороны, тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а с другой — первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии соответственно. Найдите эти числа.

(8 баллов)

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin x\cos x}-\sqrt{1-\sin x\cos x}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\sqrt{x+4-|x+3|}>x-3+|x+5|$.. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=g\left(2\sqrt{2{,}5-g(x)}\right)$, где $g(x)=3/(|x-2|+1)$ (10 баллов)

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, а боковой стороны CD в точке K, причем $AM=9$, $CK=3$. Найдите диагонали трапеции, если её периметр равен 56. (12 баллов)

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\le x_0\le 1$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y-1=|x|/x;\ (x-a)^2=y+a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=12$ и $AD=4$, а боковые ребра соответственно равны $TA=3$, $TD=5$, $TC=13$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T, центр симметрии основания и точку M, лежащей на ребре BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае? (12 баллов)

Решение варианта №5

1. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами А и В.

Решение:

Пусть s – расстояние между пунктами A и B, v_1, v_2 – скорости велосипедистов. Тогда $\frac{s}{2v_1}=\frac{s-24}{v_2}$ и $\frac{s-15}{v_1}=\frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)}=\frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2=4s^2-4\cdot 39s+60\cdot 24$; $s^2-52s+480=0$; $s_{1,2}=26\pm 14$. $s_1=40$, $s_2=12$ не удовлетворяет условиям задачи $s>15,\ s>24$.

Ответ: 40 км.

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-24}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-24}}<\frac{24}{5}$.

Решение: $\sqrt{\frac{x}{x-24}}=y>0$; $\frac{1}{y}-y<\frac{24}{5}$; $5y^2+24y-5>0$; $y_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+25}}{5}=\frac{-12\pm 13}{5}$, $y_1=\frac{1}{5}, y_2=-5$. След. $y>\frac{1}{5}$, $\frac{x}{x-24}>\frac{1}{25}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-24}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>24.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(24;+\infty)$.

3. Три числа, сумма которых 114, являются, с одной стороны, тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а с другой — первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии соответственно. Найдите эти числа.

Решение: Пусть a, b, c - искомые числа, d - разность арифметической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases}a+b+c=114,\\ ac=b^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+27d=114,\\ a(a+24d)=(a+3d)^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ 24ad=6ad+9d^2,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ d(2a-d)=0,\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=38-9d,\\ \left[\begin{array}{l}d=0,\\ d=2a,\end{array}\right.\\ b=a+3d,\\ c=a+24d,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0,\ a=b=c=38,\\ d=4,\ a=2,\ b=14,\ c=98.\end{array}\right.$$

Ответ: $a_1=38$, $b_1=38$, $c_1=38$, или $a_2=2$, $b_2=14$, $c_2=98$.

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg}2x\sqrt{\sin x\cos x}-\sqrt{1-\sin x\cos x}=0$.

Решение:

$\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin x\cos x} = \sqrt{1-\sin x\cos x}$. При условии $\operatorname{ctg} 2x \geq 0$ возводим в квадрат обе части уравнения ($1-\sin x\cos x > 0$ для всех x) : $\operatorname{ctg}^2 2x \sin x\cos x = 1-\sin x\cos x \Leftrightarrow$

$\operatorname{ctg}^2 2x \sin 2x = 2-\sin 2x \quad \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0, \quad \cos^2 2x = \sin 2x(2-\sin 2x) \Leftrightarrow$

$\sin 2x(2-\sin 2x) = 1-\sin^2 2x \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. С учетом условия $\operatorname{ctg} 2x \geq 0$ окончательно имеем $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x+4-|x+3|} > x-3+|x+5|$. (10 баллов)

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3+|x+5| < 0, \\ x+4-|x+3| \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3+|x+5| \geq 0, \\ x+4-|x+3| > (x-3+|x+5|)^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 < x+5 < 3-x, \\ -x-4 \leq x+3 \leq x+4, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+5 \geq 3-x, \\ x+5 \leq x-3, \end{array}\right. \\ x+4-|x+3| > (x-3+|x+5|)^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -3{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ 1 > (2x+2)^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3{,}5; -1), \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ (1-2x-2)(1+2x+2) > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3{,}5; -1), \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ (2x+1)(2x+3) < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3{,}5; -1), \\ x \in [-1; -0{,}5), \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-3{,}5; -0{,}5).$$

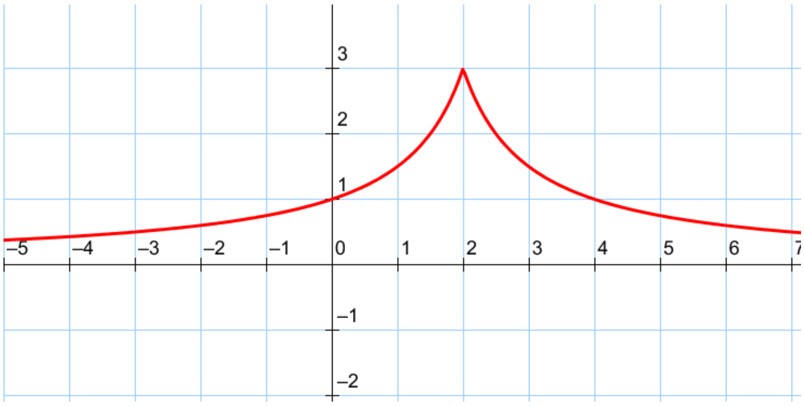
Ответ: $x \in [-3{,}5; -0{,}5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(2\sqrt{2{,}5-g(x)})$, где

$g(x) = \dfrac{3}{|x-2|+1}$.

Решение:

Функция $g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)$ – убывает. График функции $g(x)$ изображен на рисунке.



Функция $\phi(t)=2\sqrt{2{,}5-t}$ определена для $t\in(-\infty;2{,}5]$. При $t=g(x)$ функция $\phi(t)=2\sqrt{2{,}5-t}$ принимает свои значения при $t\in(0;2{,}5]$, причем множество значений этой функции есть отрезок $[0;2\sqrt{2{,}5})$. Для нахождения множества значений функции $f(x)$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $[0;2\sqrt{2{,}5})$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[1;3]$.

Ответ: $E_f=[1;3]$.

7. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AB в точке M, а боковой стороны CD в точке K, причем $AM=9$, $CK=3$. Найдите диагонали трапеции, если её периметр равен 56.

Решение: M,E,K,F - точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, AD соответственно. Тогда

$AM=AF=a=9$,

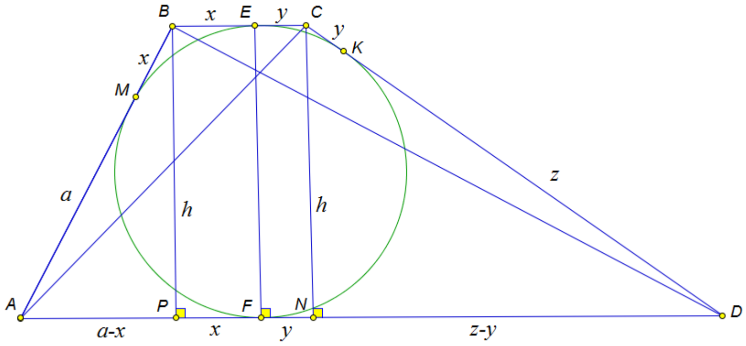
$BM=BE=x$, $CE=CK=y=3$,

$DK=DF=z$.

$P_{ABCD}=2(9+x+3+z)=56$,

$x+z=16$.

Пусть $BP\perp AD, CN\perp AD$.



В треугольнике ABP по теореме Пифагора имеем: $h^2+(a-x)^2=(a+x)^2$, $h^2=4ax$. В треугольнике CDN по теореме Пифагора имеем: $h^2+(z-y)^2=(z+y)^2$, $h^2=4yz$. Тогда $ax=yz$, $3x=z$. Так как $x+z=16$, то

$x=4,\ z=12$. Находим стороны трапеции $AB=13$, $BC=7$, $CD=15$, $AD=21$ и высоту $h=12$. Из треугольника DBP имеем по теореме Пифагора находим BD:

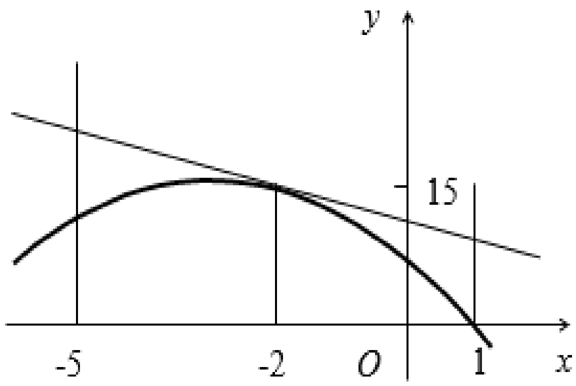
$$BD^2=BP^2+PD^2=h^2+(x+z)^2=12^2+16^2=400,\ BD=20.$$

Из треугольника CAN по теореме Пифагора находим AC:

$$AC^2=AN^2+CN^2=(a+y)^2+h^2=12^2+12^2=288,\ AC=12\sqrt{2}.$$

Ответ: $AC=12\sqrt{2}$, $BD=20$.

8. Какую наименьшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x=-5$ и $x=1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху касательной к графику функции $y=7-6x-x^2$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-5\le x_0\le 1$?



Решение:

$y=7-6x-x^2,\quad x_1=-5,\quad x_2=1.$

Уравнение касательной: $y=7-6x_0-x_0^2-(2x_0+6)(x-x_0)$, или $y=x_0^2+7-(2x_0+6)x$.

$y_1=y(x_1)=x_0^2+7-(2x_0+6)(-5)$; $y_2=y(x_2)=x_0^2+7-(2x_0+6)\cdot 1$.

Полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$$S(x_0)=0{,}5(y_1+y_2)\ (x_2-x_1)=\left(x_0^2+7-(2x_0+6)(-2)\right)6=6\left(x_0^2+4x_0+19\right).$$

$S'(x_0)=6(2x_0+4)=0,\quad x_0=-2$. $\min S(x_0)=S(-2)=6(4-8+19)=90$.

Ответ: 90 кв. ед.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y=\dfrac{x+|x|}{x}$; $(x-a)^2=y+a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

I. При $x>0$ $y=2$, $x^2-2ax+a^2-a-2=0$ (*). Уравнение (*) имеет два различных

положительных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2}$, если: $\begin{cases} D/4=a+2>0, \\ a>0, \\ a^2-a-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-2, \\ a>0, \\ \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a>2$.

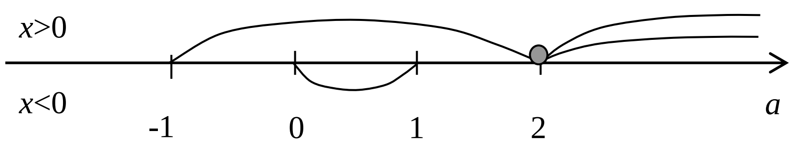
Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2}=a+\sqrt{a+2}$, если: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D=0, \\ a>0, \end{cases} \\ a^2-a-2<0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=2 \end{array}\right. \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -1<a\le 2$.

II. При $x<0$, $y=0$, $x^2-2ax+a^2-a=0$ (**). Уравнение (**) не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4=a>0, \\ a<0, \\ a^2-a>0. \end{cases}$ решений не имеет.

Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x=a-\sqrt{a}$, если

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4=a=0, \\ a<0, \end{cases} \\ a^2-a<0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=1 \end{array}\right. \\ a<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<a<1$



Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2},\ y=2$;

при $(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ y_1=2;\ x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$;

при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2},\ y_{1,2}=2$.

10. Основанием пирамиды $TABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=12$ и $AD=4$, а боковые ребра соответственно равны $TA=3$, $TD=5$, $TC=13$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину T, центр симметрии основания и точку M, лежащую на ребре BC? На какие части делит точка M ребро BC в этом случае?

Решение:

При построении чертежа следует учесть следующее.

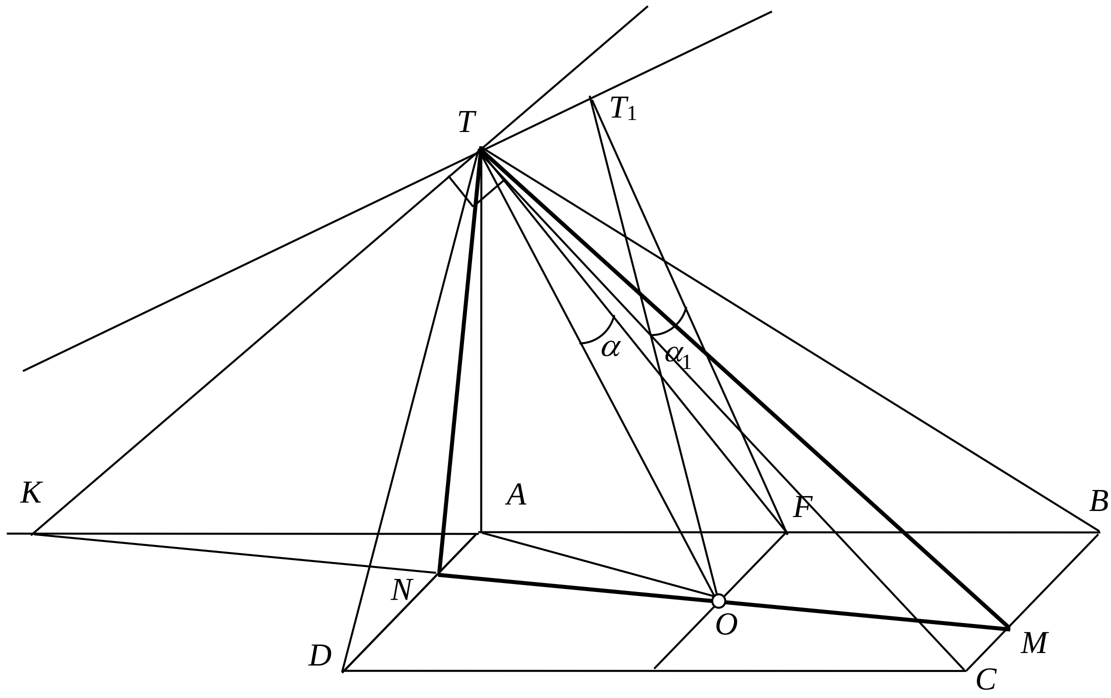
$TA^2 + AD^2 = TD^2, \left(3^2 + 4^2 = 5^2\right) \Rightarrow \angle TAD = \pi/2$

$AB = DC = 12$

$DC^2 + TD^2 = TC^2, \left(12^2 + 5^2 = 13^2\right) \Rightarrow \angle TDC = \pi/2$

$DC \perp TAD,\ AB \perp TAD,\ \angle TAB = \pi/2$

Следовательно, $TA \perp ABCD$.



При любом положении точки M на стороне BC грань TAB является ортогональной проекцией сечения TMN. Площадь сечения будет наименьшей, если наименьшим будет угол между секущей плоскостью и гранью TAB. Так как секущая плоскость проходит через центр симметрии основания O и вершину пирамиды T, то отрезок OT является наклонной к плоскости грани TAB, и наименьшим возможным углом будет $\angle OTF$, где $OF \perp TAB,\ F \in AB$. Линия пересечения секущей плоскости и плоскости грани TAB $TK \perp TF$ и пересекает прямую AB в точке K. Если условие $TK \perp TF$ не выполнено, то $FT_1 < FT,\ \mathrm{tg}\alpha_1 > \mathrm{tg}\alpha,\ \cos\alpha_1 < \cos\alpha$ и $\dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha_1} > \dfrac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha}$.

Прямая, проведенная через точки K и O, пересекает ребро AD в точке N и ребро BC в точке M, ΔNTM – искомое сечение.

Если обозначить $AB = a,\ BC = b,\ TA = c$, то $TF = \sqrt{(a/2)^2 + c^2}$;

$$TO = \sqrt{TF^2 + OF^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}\Big/2,\ \cos\angle OTF = \frac{TF}{TO} = \frac{\sqrt{a^2+4c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}.$$

$$S_{\Delta NTM} = \frac{S_{\Delta ATB}}{\cos\alpha} = \frac{ac\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{2\sqrt{a^2+4c^2}} = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2+c^2}}{2\sqrt{(a/2)^2+c^2}}.$$

В ΔKTF $\angle KTF = 90^\circ$, $AK = AT^2\big/AF = 2c^2\big/a$. $BK = AK + AB = \dfrac{2c^2}{a} + a$.

Точка M делит отрезок BC в отношении $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{a^2+2c^2}{2c^2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$.

AB	BC	TA	TF	TO	$\cos\alpha$	S_{NTM}	$BM:MC$	BM	MC
12	4	3	$3\sqrt{5}$	7	$3\sqrt{5}/7$	$42/\sqrt{5}$	9:1	18/5	9/5

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 9

1. Две автомашины перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 тонны меньше, а на вторую на 3 тонны меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и планировалось, первая машина перевезла на 60 тонн больше, чем вторая. Сколько удобрений грузили в каждую машину и сколько рейсов было выполнено? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^6-5}}{x^3}-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-5}}<\frac{5}{6}$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметичес- кой прогрессии (a_n), если $a_{30}=3,\ a_{32}=11$? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{|x|+21-7\sqrt{|x|+9}}{x^2-8|x|}>0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$, где $g(x)=\frac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$ (10 баллов)

7. В трапеции *ABCD* основания *AD*=9, ВС=2, углы *A* и *D* при основании равны $\operatorname{arctg} 4$ и $\operatorname{arctg}(2/3)$, соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *CBE*, где *E* – точка пересечения диагоналей трапеции. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси *x*, а координаты двух других вершин удовлетворяют уравнению $\sqrt{y}=5-x^2$?

(12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$2y-2=a(x-2),\quad \frac{4y}{|x|+x}=\sqrt{y}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды, равная h, совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*,

образует с плоскостью основания угол 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD?

(12 баллов)

Решение варианта №9

1. Две автомашины перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 тонны меньше, а на вторую на 3 тонны меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и планировалось, первая машина перевезла на 60 тонн больше, чем вторая. Сколько удобрений грузили в каждую машину и сколько рейсов было выполнено?

Решение:

Пусть x, y – грузоподъемность, t – число рейсов по плану.

$$\begin{cases} xt=(x-4)(t+10), \\ yt=(y-3)(t+10), \\ \quad xt-yt=60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-4t=40, \\ 10y-3t=30, \\ (x-y)t=60. \end{cases} \Rightarrow 10(x-y)-t=10 \Rightarrow t^2+10t-600=0.$$

Отсюда $t_1=20,\ t_2=-30$ – посторонний корень; $x=12,\ y=9$. На первую машину грузили 8 т, на вторую 6 т, выполнено по 30 рейсов.

Ответ: 8 т, 6 т, 30 рейсов.

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^6-5}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-5}}<\dfrac{5}{6}$.

Решение: ОДЗ: $|x|>\sqrt[6]{5}$. $\dfrac{\sqrt{x^6-5}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-5}}<\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x^3\sqrt{x^6-5}}<\dfrac{1}{6}$.

1) При $x>\sqrt[6]{5}$ неравенство верно.

2) При $x<-\sqrt[6]{5}$ приходим к неравенству $-x^3\sqrt{x^6-5}>6$, или $\left(-x^3\sqrt{x^6-5}\right)^2>36$,

$x^{12}-5x^6-36>0,\ (x^6+4)(x^6-9)>0,\ (x^3+3)(x^3-3)>0.$ Поскольку $x<-\sqrt[6]{5}$, то $x<-\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-\sqrt[3]{3})\cup(\sqrt[6]{5};+\infty)$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметичес- кой прогрессии (a_n), если $a_{30}=3,\ a_{32}=11$?

Решение:

Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии, $\begin{cases} a+29d=3, \\ a+31d=11 \end{cases} \Leftrightarrow d=4,\ a=-113$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\ge 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-113+4(n-1)<0$ найдем $n=[117/4]=29$. Тогда $\min S_n=S_{29}=0,5\cdot(-113-113+4\cdot 28)\cdot 29=-1653$.

Ответ: –1653.

4. Решите уравнение $\dfrac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0$. (8 баллов)

Решение:

$$\frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x-1}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0 \Leftrightarrow \frac{4\sin x\cos^2 x-2\sin x-\cos 2x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}=0.$$

При условии $\sin x-\cos x>0$ находим корни уравнения

$4\sin x\cos^2 x-2\sin x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x-1)-\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow$

$(2\sin x-1)\cos 2x=0 \Leftrightarrow \quad 2\sin x-1=0, \quad \cos 2x=0 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$ $n\in Z$. С учетом условия $\sin x-\cos x>0$

окончательно имеем $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{|x|+21-7\sqrt{|x|+9}}{x^2-8|x|}>0$

Решение:

ОДЗ: $x\neq 0, \quad x\neq \pm 8.$

Разложим числитель на множители:

$$|x|+21-7\sqrt{|x|+9}=|x|+9-7\sqrt{|x|+9}+12=\left(\sqrt{|x|+9}\right)^2-7\sqrt{|x|+9}+12=\left(\sqrt{|x|+9}-3\right)\left(\sqrt{|x|+9}-4\right)$$

Имеем:

$$\frac{\left(\sqrt{|x|+9}-3\right)\left(\sqrt{|x|+9}-4\right)}{|x|(|x|-8)}>0 \Leftrightarrow \frac{(|x|+9-9)(|x|+9-16)}{|x|(|x|-8)}>0 \Leftrightarrow \frac{|x|(|x|-7)}{|x|(|x|-8)}>0.$$

Решая методом интервалов, получаем $|x|\in(0;7)\cup(8;+\infty)$.

Имеем $x\in(-\infty;-8)\cup(-7;0)\cup(0;7)\cup(8;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-8)\cup(-7;0)\cup(0;7)\cup(8;+\infty)$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$, где $g(x)=\dfrac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}$.

Решение: $g(x)=\dfrac{\cos 6x+2\sin^2 3x}{2-2\cos 3x}=\dfrac{1}{2-2\cos 3x}$.

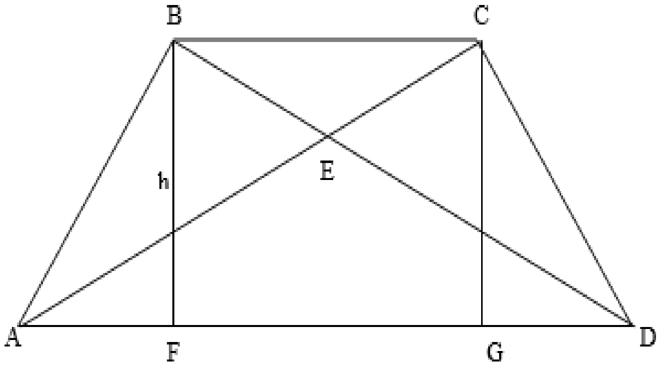
Функция $t=\cos 3x$ принимает значения $t\in[-1;1]$. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{2-2t}$, определенную на полуинтервале $[-1;1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t=1$ и $y=0$. Функция $y=\dfrac{1}{2-2t}$ на промежутке $[-1;1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение y равно $\dfrac{1}{4}$, оно достигается в точке $t=-1$, и функция принимает все значения из промежутка $\left[\dfrac{1}{4};\infty\right)$.

Функция $f(x)=\sqrt{1-g^2(x)}$ определена для тех x, для которых $g(x)$ принимает значения из промежутка $[1/4;1]$. Множество значений функции $f(x)$ есть множество $E_f=\left[0;\sqrt{15}/4\right]$.

Ответ: $E_f=\left[0;\sqrt{15}/4\right]$.

7. В трапеции *ABCD* основания *AD*=9, ВС=2, углы А и *D* при основании равны $\operatorname{arctg}4$ и $\operatorname{arctg}(2/3)$, соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *CBE*, где *E* – точка пересечения диагоналей трапеции.

Решение:



$BF\perp AD; CG\perp AD; BF=CG=h,\ FG=BC.$

Пусть $AF=x\Rightarrow$

$x\cdot tgA=((AD-BC)-x)tgD,$

$4x=\dfrac{2}{3}(AD-BC-x),$

$14x=2(AD-BC),\ \ x=\dfrac{AD-BC}{7}.$

$x=1,\ AG=x+BC=3,\ FD=AD-x=8.$

$h=4x=4$, $AC=\sqrt{AG^2+h^2}=5,$

$BD=\sqrt{FD^2+h^2}=4\sqrt{5}.$

$$\Delta BCE\approx\Delta AED;\quad \frac{BE}{ED}=\frac{CE}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{2}{9}\quad\Rightarrow S_{CBE}=\frac{1}{2}BC\cdot\frac{2}{11}h=\frac{8}{11};\quad BE=\frac{2}{11}BD=\frac{8\sqrt{5}}{11};$$

$$EC=\frac{2}{11}AC=\frac{10}{11};\quad R_{on}=\frac{BC\cdot BE\cdot EC}{4S_{CBE}}=\frac{5\sqrt{5}}{11}.$$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{5}}{11}$.

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси *x*, а координаты двух других вершин удовлетворяют уравнению $\sqrt{y}=5-x^2$?

$\sqrt{y}=5-x^2;\ y=\left(5-x^2\right)^2,\ |x|\le\sqrt{5}$.

$S(x)=2xy=2\left(x^5-10x^3+25x\right)$

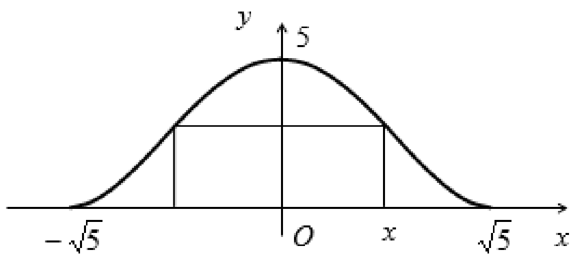
$0 \le x \le \sqrt{5}$.

$S'(x) = 2(5x^4 - 30x^2 + 25) = 0$,

$10(x^4 - 6x^2 + 5) = 0;\ x^2 = 3 \pm 2$.

При $(x^2)_1 = 5,\ S(\sqrt{5}) = 0$.

При $(x^2)_2 = 1,\ x_2 = 1,\ S(1) = 32$ –



наибольшее значение площади прямоугольника

Ответ: 32

9. Найдите все значения *a*, при которых система уравнений $2y - 2 = a(x-2),\quad \dfrac{4y}{|x| + x} = \sqrt{y}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

ОДЗ: $x > 0,\ y \ge 0$.

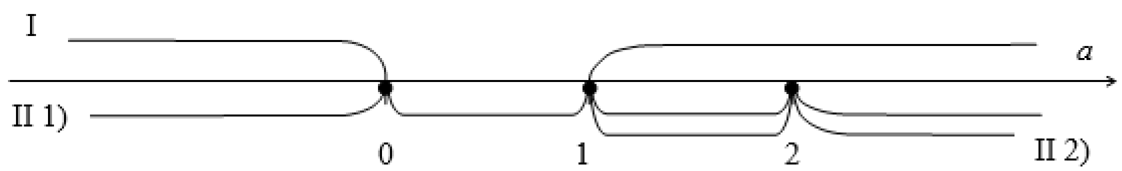
В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $2y = x\sqrt{y}$.

I. $y = 0,\ x = 2 - \dfrac{2}{a} = \dfrac{2(a-1)}{a} > 0$, отсюда $\left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 1. \end{array}\right.$

II. $y > 0,\ y = x^2/4,\ x > 0;\ (x-2)(x+2) = 2a(x-2)$.

1) $x = 2,\ y = 1,\ a \in R$.

2) $x + 2 = 2a,\ x = 2(a-1) > 0,\ a > 1$. Найденное решение $x = 2(a-1),\ y = (a-1)^2$ совпадает с предыдущим, если $2 = 2a - 2,\ a = 2$. Итак, при $a \in (1;2) \cup (2;+\infty)$ $x = 2a - 2,\ y = (a-1)^2$.



Ответ:

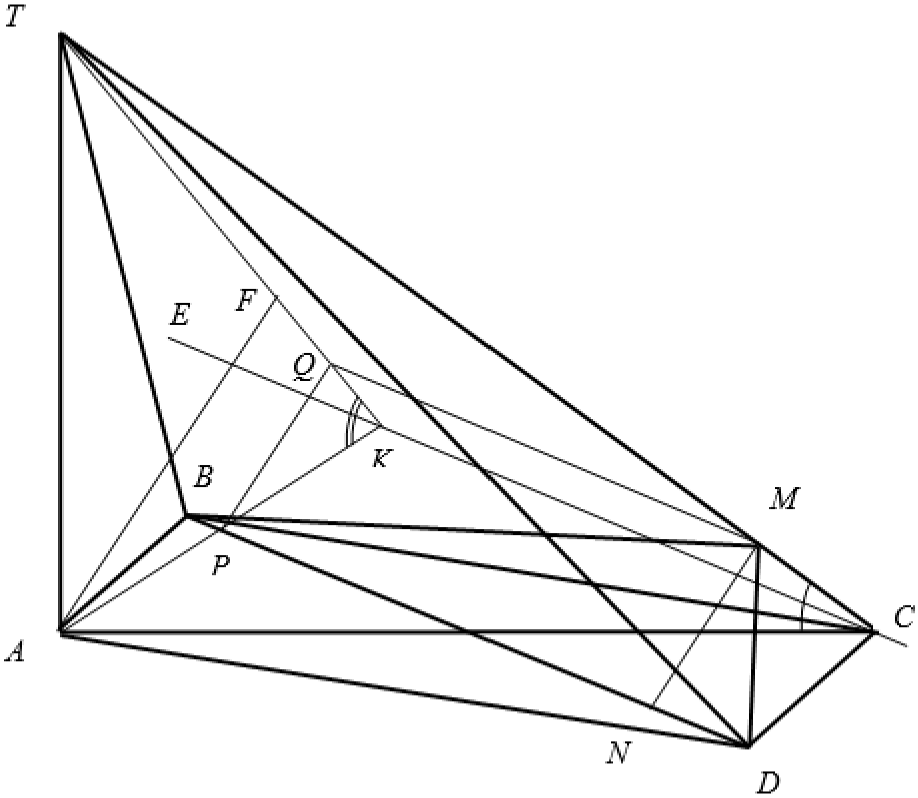
$a \in (-\infty;0) \cup \{2\},\ x_1 = 2 - 2/a,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1$;

$a \in [0;1],\ x = 2,\ y = 1$;

$a \in (1;2) \cup (2;+\infty),\ x_1 = 2 - 2/a,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2a - 2,\ y_3 = (a-1)^2$.

10. Основанием пирамиды *TABCD* служит прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды, равная h, совпадает с боковым ребром *TA*, а боковое ребро *TC* наклонено к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, проходящая через ребро *TC* и параллельная диагонали основания *BD*, образует с плоскостью основания угол 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания *BD*?

Решение:



Обозначим $\alpha = \angle TCA$, тогда $AC = BD = TA\,\mathrm{ctg}\angle TCA = h\,\mathrm{ctg}\alpha$. Проведем $EC \| BD$, $AK \perp EC,\ K \in EC$, обозначим $\beta = \angle TKA$. Пусть $P = AK \cap BD$, тогда $AP = PK$. Проведем $AF \perp TK$, $PQ \perp TK$, $QM \| (EC)$, $M \in TC$ и $MN \perp BD$; тогда MN – высота сечения BMD, имеющая наименьшую длину, причем $MN = PQ$. Найдем площадь сечения: $PQ = 0{,}5AF = 0{,}5AT\cos\beta = 0{,}5h\cos\beta$, $S_{\Delta BMD} = 0{,}5BD \cdot MN = 0{,}25h^2\,\mathrm{ctg}\alpha\cos\beta$.

Ответ: $\alpha = 30°, \beta = 60°,\ S = h^2\sqrt{3}/8$.

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету

«Математика», осень 2016 г.

Вариант № 15

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

(8 баллов)

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{21}{10}$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 113, 109, 105,…? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{19-|x-3|}{\sqrt{|x-3|-1}-2}\leq 1$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$, где $g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x$ (10 баллов)

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 1, а его гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам.

(12 баллов)

8. На прямой $x-y=5$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/8$. Напишите уравнения этих касательных.

(12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=4\sqrt{a(x-3)+2}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

(12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 20 и 8, а угол между ними $60°$.

(12 баллов)

Решение варианта №15

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

Решение:

x тыс. рублей – закупочная стоимость обуви, проданной в первую неделю, y – остатка.

$$\begin{cases} x+y=180, \\ 25x+16y=20(x+y); \end{cases} \quad \begin{cases} 5x=4y, \\ x+5/4\,x=180; \end{cases} \quad \begin{cases} x=80, \\ y=100. \end{cases}$$

Получено от продажи в первую неделю $80\cdot 1,25=100$ тыс. рублей.

Ответ: 100 тыс. рублей

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{21}{10}$.

Решение:

ОДЗ: $|x|>\sqrt[6]{21}$. $\dfrac{\sqrt{x^6-21}}{x^3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{21}{10} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x^3\sqrt{x^6-21}}<\dfrac{1}{10}$.

1) При $x>\sqrt[6]{21}$ неравенство верно.

2) При $x<-\sqrt[6]{21}$ приходим к неравенству $-x^3\sqrt{x^6-21}>10$, или $\left(-x^3\sqrt{x^6-21}\right)^2>100$,

$x^{12}-21x^6-100>0$, $(x^6+4)(x^6-25)>0$, $(x^3+5)(x^3-5)>0$. Поскольку $x<-\sqrt[6]{21}$, то $x<-\sqrt[3]{5}$.

Ответ: $x\in(-\infty;-\sqrt[3]{5})\cup(\sqrt[6]{21};+\infty)$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 113, 109, 105,…?

Решение:

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a_1+d(n-1)$, то из неравенства $113-4(n-1)>0$ найдем $n=[117/4]=29$.

Тогда $\max S_n=S_{29}=0{,}5\cdot(113+113-4\cdot 28)\cdot 29=1653$.

Ответ: 1653.

4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0$. (8 баллов)

Решение:

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{\sqrt{3}\cos x-\sin x}}=0.$$

При условии $\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ находим корни уравнения $\sin 2x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow$ $2\sin x(\cos x+\sin x)+\sqrt{3}(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow (2\sin x+\sqrt{3})(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow$

$2\sin x+\sqrt{3}=0,\quad \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow$

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi n\ n\in Z$. С учетом условия $\sqrt{3}\cos x-\sin x>0$ окончательно имеем $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\frac{19-|x-3|}{\sqrt{|x-3|-1}-2}\le 1$. (10 баллов)

Решение:

Замена: $\sqrt{|x-3|-1}=t\ge 0,\ x=t^2+1.$

$$\frac{19-t^2-1}{t-2}\le 1 \Leftrightarrow \frac{18-t^2-t+2}{t-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-4)(t+5)}{t-2}\ge 0 \overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow} t\in[0;2)\cup[4;\infty).$$

$|x-3|-1\in[0;4)\cup[16;\infty) \Leftrightarrow |x-3|\in[1;5)\cup[17;\infty)$

$x-3\in(-\infty;-17]\cup(-5;-1]\cup[1;5)\cup[17;\infty) \Leftrightarrow x\in(-\infty;-14]\cup(-2;2]\cup[4;8)\cup[20;\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-14]\cup(-2;2]\cup[4;8)\cup[20;\infty)$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$, где $g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x$.

Решение:

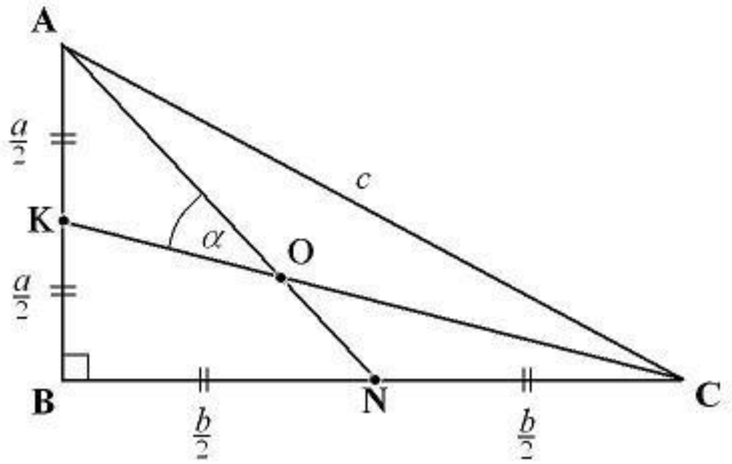
$g(x)=-8-2\cos 8x-4\cos 4x=-8-4\cos^2 4x+2-4\cos 4x=$
$-4\cos^2 4x-4\cos 4x-6=-(2\cos 4x+1)^2-5.$

Функция $t=2\cos 4x$ принимает значения $t\in[-2;2]$. Рассмотрим функцию $y=-5-(t+1)^2$, определенную на отрезке $[-2;2]$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(-1;-5)$, ветви которой направлены вниз. Таким образом, максимальное значение y равно -5, оно достигается в точке $t=-1$, минимальное значение функция принимает в точке $t=2$, оно равно -14, и функция принимает все значения из промежутка $[-14;-5]$.

Функция $f(x)=\sqrt{36-g^2(x)}$ определена для тех x, для которых $g(x)$ принимает значения из промежутка $[-6;-5]$. Множество значений функции $f(x)$ есть множество $E_f=\left[0;\sqrt{11}\right]$.

Ответ: $E_f=\left[0;\sqrt{11}\right]$.

7. Площадь прямоугольного треугольника равна 1, а его гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла между медианами данного треугольника, проведенными к его катетам.



Решение:

Пусть катеты треугольника равны a и b. Тогда $\begin{cases} \dfrac{ab}{2}=1, \\ a^2+b^2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{b}, \\ \dfrac{4}{b^2}+b^2=5 \end{cases}$. Решая уравнение $b^4-5b^2+4=0$, получаем: $b^2=4$ или $b^2=1$. Тогда $b=2$ и $a=1$ или $b=1$ и $a=2$. По теореме Пифагора найдем медианы AN и CK:

$$AN^2=1+1=2 \Rightarrow AN=\sqrt{2}, \quad CK^2=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4} \Rightarrow CK=\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

В треугольнике AOK имеем: $AK=\dfrac{1}{2}$, $KO=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$, $AO=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha=\frac{AO^2+KO^2-AK^2}{2AO\cdot KO}=\frac{\frac{8}{9}+\frac{17}{36}-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{6}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{10}{2\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}.$$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

8. На прямой $x-y=5$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/8$. Напишите уравнения этих касательных**.**

Решение:

Пусть $y=ax^2$, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ – точки касания, $C(x_0;y_0)$ – точка пересечения касательных.

Уравнения касательных:

$y=ax_1^2+2a(x-x_1)$, или $y=2ax_1x-ax_1^2$;

$y=ax_2^2+2a(x-x_2)$, или $y=2ax_2x-ax_2^2$.

Из системы уравнений $\begin{cases} y_0=2ax_1x_0-ax_1^2, \\ y_0=2ax_2x_0-ax_2^2 \end{cases}$ находим $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_0=a\,x_1x_2$.

По условию перпендикулярности касательных $2ax_1\cdot 2ax_2=-1$, отсюда получаем $y_0=-\dfrac{1}{4a}$. Из уравнения заданной прямой находим x_0.

Для отыскания x_1 и x_2 используем квадратное уравнение $x^2-2x_0x-\dfrac{1}{4a^2}=0$. Отсюда $x_{1,2}=x_0\pm\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{4a^2}}$.

Ответ: $a=\dfrac{1}{8}$, $y_0=-2$, $x_0=5+y_0=3$. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+16}=3\pm5$; $x_1=8, x_2=-2$.

9. Определите все значения a, при которых уравнение $x+|x|=4\sqrt{a(x-3)+2}$ имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений.

Решение:

I. При $x\ge 0$, $x^2-4ax+12a-8=0$ (*).

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=2a\pm2\sqrt{a^2-3a+2}$, если:

$$\begin{cases} D/4=4(a^2-3a+2)>0, \\ a>0, \\ 12a-8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<1, \\ a>2, \end{array}\right. \\ a>0, \\ a\ge 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2/3\le a<1, \\ a>2. \end{array}\right.$$

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень $x=2a+2\sqrt{a^2-3a+2}$,

$$\text{если: }\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0,\\ a\ge 0,\end{cases}\\ 12a-8<0,\\ \begin{cases}a=2/3,\\ a<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=2,\\ a<2/3.\end{array}\right.$$

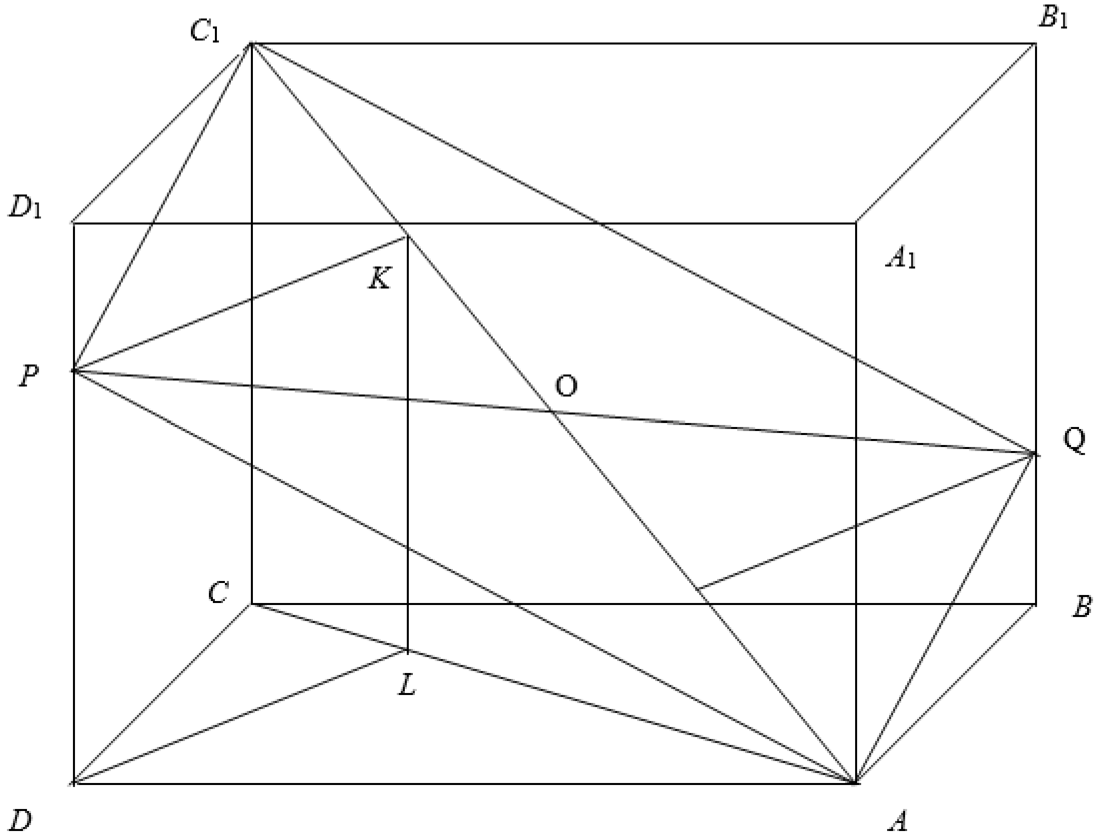
II. При $x<0$, $\quad x=\dfrac{3a-2}{a}<0 \Rightarrow 0<a<2/3$.

Сравнивая с I, 2, замечаем, что при $0<a<2/3$ также будет два различных корня.

Ответ: при $a\in[2/3;1)\cup(2;+\infty)$, $x_{1,2}=2a\pm 2\sqrt{a^2-3a+2}$; при $0<a<2/3$, $\quad x_1=\dfrac{3a-2}{a}$;,

$x_2=2a+2\sqrt{a^2-3a+2}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 20 и 8, а угол между ними $60°$.



Решение:

Проведем $DL \perp AC,\ LK \| CC_1\ (K \in AC_1),\ PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ = PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 20,\ \ PQ = 8,\ \ \varphi = 60°,\ \ \cos\varphi = 1/2,\ \ \sin\varphi = \sqrt{3}/2.$

$$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \quad OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

$\dfrac{CL}{AL} = \dfrac{C_1K}{AK} = \dfrac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \dfrac{10-2}{10+2} = \dfrac{2}{3}.$ Пусть $CL = 2x,$ тогда $AL = 3x$.

$DL^2 = CL \cdot AL,$ т.е. $12 = 6x^2, \quad x = \sqrt{2}, \quad CL = \sqrt{2},\ \ AL = 3\sqrt{2}$.

Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{12+8} = 2\sqrt{5}$, $AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{12+18} = \sqrt{30}$.

Ответ: $2\sqrt{5}; \sqrt{30}$.