Решение варианта №26

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 8 км, одновременно вышел турист и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее получаса, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A, увеличив при этом свою скорость на 25%. Через 10 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с туристом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) туриста, и для этого значения скорости туриста найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Решение: Пусть x (км/ч) - скорость туриста, y (км/ч) – первоначальная скорость велосипедиста, t (ч) – время, затраченное велосипедистом на путь от A до B. Тогда

$$\begin{cases} x(t+1/6)+5y/24=8, \\ yt=8, \\ t\geq 0{,}5, \end{cases} \Rightarrow\ x(8/y+1/6)+5y/24=8,\ \Rightarrow 5y^2+(4x-192)y+192x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D/4=(2x-96)^2-960x\geq 0$. Следовательно, $x^2-336x+2304\geq 0$, $D/4=\left(72\sqrt{5}\right)^2$,

$x\in(-\infty;168-72\sqrt{5}]\cup[168+72\sqrt{5};+\infty)$. Поскольку по условию $x\in N$, и $x/6<8$, т.е. $x<48$, то $x\in[1;168-72\sqrt{5}]\cap N$. Используя оценку $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$, получаем оценку $160<72\sqrt{5}<161$, и $7<168-72\sqrt{5}<8$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=7$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=7$ из уравнения $5y^2-164y+192\cdot 7=0$, $y_1=84/5$, $y_2=16$. Поскольку $t\geq 0{,}5$, $t=\dfrac{8}{y}\geq\dfrac{1}{2}$, и $y\leq 16$, то $y=16$.

Ответ: 7 км/ч, 16 км/ч.

2. Решите неравенство $\log_x(25-40x+16x^2)<0$.

Решение: $\log_x(25-40x+16x^2)<0$. ОДЗ: $x>0,\quad x\neq 1,\quad x\neq 5/4$.

1) $0<x<1;\quad 25-40x+16x^2>1\Leftrightarrow 2x^2-5x+3>0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>3/2 \end{array}\right. \\ 0<x<1 \end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1;$

2) $x>1,\quad x\neq 5/4;\ 25-40x+16x^2<1\Leftrightarrow 2x^2-5x+3<0\Leftrightarrow 1<x<3/2,\ x\neq 5/4$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;5/4)\cup(5/4;3/2)$.

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $280x^2-61xy+3y^2-13=0$ и являются соответственно четвертым и девятым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: Разложим на множители выражение $280x^2-61xy+3y^2$. При $y\neq 0$ имеем $y^2\left(280\left(\frac{x}{y}\right)^2-61\left(\frac{x}{y}\right)+3\right)=280y^2\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{40}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{7}\right)=(40x-3y)(7x-y)$. Эта формула верна и для всех действительных чисел y. По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(40x-3y)(7x-y)=13$. Целые числа $40x-3y$ и $7x-y$ являются делителями числа 13, причем возможны следующие случаи:

$$\begin{cases}40x-3y=13,\\ 7x-y=1;\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}40x-3y=-13,\\ 7x-y=-1;\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}40x-3y=-1,\\ 7x-y=-13;\end{cases}\quad 4)\ \begin{cases}40x-3y=1,\\ 7x-y=13.\end{cases}$$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части второго уравнения системы на -3 и складываем с первым:

$$\begin{cases}19x=10,\\ 7x-y=1;\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}19x=-10,\\ 7x-y=-1;\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}19x=38,\\ 7x-y=-13;\end{cases}\quad 4)\ \begin{cases}19x=-38,\\ 7x-y=13.\end{cases}$$

Системы 1) и 2) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x<y$, этому условию удовлетворяют решения системы 4): $x=-2,$ $y=-27.$ Таким образом, $a_4=-2,\ a_9=-27,$ или $a_1+3d=-2,\quad a_1+8d=-27.$ Отсюда получаем $d=-5.$

Ответ: $d=-5.$

4. Решите уравнение $\dfrac{4\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 2x\sin 6x-\cos 4x-\cos 12x+2}{\sqrt{\cos x-\sin x}}=0$.

Решение:

$$\frac{4\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 2x\sin 6x-\cos 4x-\cos 12x+2}{\sqrt{\cos x-\sin x}}=0.$$

При условии $\cos x-\sin x>0$ находим корни уравнения

$4\operatorname{tg}^4 8x+4\sin 2x\sin 6x-\cos 4x-\cos 12x+2=0\quad\Leftrightarrow$

$$4\,\mathrm{tg}^4 8x+4\sin 2x\sin 6x-1+2\sin^2 2x-1+2\sin^2 6x+2=0 \Leftrightarrow 4\,\mathrm{tg}^4 8x+2(\sin 2x+\sin 6x)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,8x=0, \\ \sin 2x+\sin 6x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \sin 4x=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{8},\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z, \\ x=\dfrac{\pi l}{4},\ l\in Z, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi l}{4},\ l\in Z.$$

С учетом условия $\cos x-\sin x>0$ окончательно имеем $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $$\frac{(2\cdot 3^{-\log_x 2}-6)\sqrt{2-\sqrt{2\log_x 2+3}}}{2+\sqrt{\log_x 2+2}}>\frac{(3^{-\log_x 2}-3)\sqrt{2-\sqrt{2\log_x 2+3}}}{\sqrt{\log_x 2+2}-1}$$

Решение: Сделаем замену переменного $y=\log_x 2$.

$$\frac{(2\cdot 3^{-y}-6)\sqrt{2-\sqrt{2y+3}}}{2+\sqrt{y+2}}>\frac{(3^{-y}-3)\sqrt{2-\sqrt{2y+3}}}{\sqrt{y+2}-1} \Leftrightarrow$$

$$(3^{-y}-3)\left(\frac{2}{2+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{y+2}-1}\right)\sqrt{2-\sqrt{2y+3}}>0.$$

Найдем ОДЗ: $y\ge -2$, $y\ne -1$, $2-\sqrt{2y+3}\ge 0 \Rightarrow -1{,}5\le y\le 0{,}5$. Поскольку неравенство строгое, то при $-1{,}5\le y<0{,}5$, $y\ne -1$, неравенство равносильно следующему

$(-y-1)\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{y+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{y+2}-1}\right)>0$, или $(y+1)\left(\dfrac{\sqrt{y+2}-4}{(2+\sqrt{y+2})(\sqrt{y+2}-1)}\right)<0$, или $\dfrac{(y+1)(y-14)}{(y+1)}<0$,

или $y<14$. Таким образом, $-1{,}5\le y<-1$ или $-1<y<0{,}5$. Производя обратную замену,

получаем: $\begin{cases} \log_x 2\ge -1{,}5, \\ \log_x 2<0{,}5, \\ \log_x 2\ne -1, \end{cases} \Leftrightarrow$

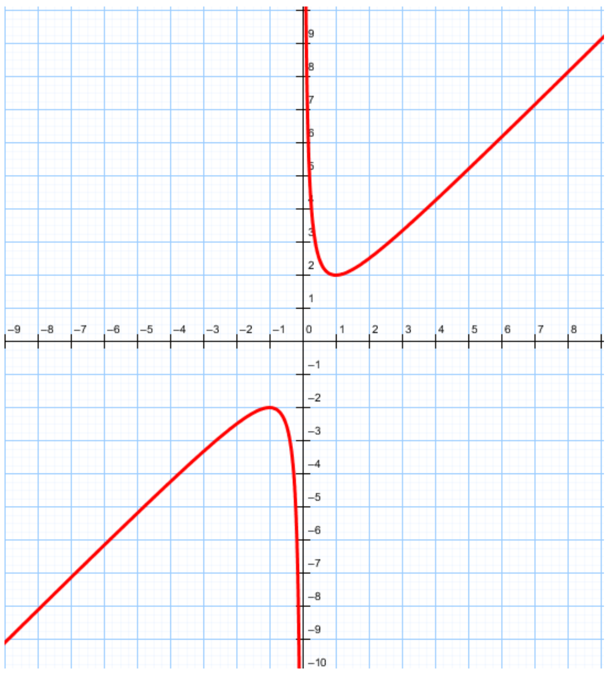
$$\begin{cases}\dfrac{2+3\log_2 x}{2\log_2 x}\ge 0,\\ \dfrac{2-\log_2 x}{2\log_2 x}<0,\\ x\ne 1/2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_2 x>0,\\ \log_2 x\le -2/3,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x<0,\\ \log_2 x>2,\end{array}\right.\\ x\ne 1/2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;1/\sqrt[3]{4}]\cup(1;+\infty),\\ x\in(0;1)\cup(4;+\infty),\\ x\ne 1/2,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x\in(0;1/2)\cup(1/2;1/\sqrt[3]{4}]\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $x\in(0;1/2)\cup(1/2;1/\sqrt[3]{4}]\cup(4;+\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(64g(g(\ln x))/1025)$, где $g(x)=x^5+1/x^5$. (10 баллов)

Решение: Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t)=t+1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t\ne 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции $\varphi(t)$: $\varphi'(t)=1-1/t^2=(t-1)(t+1)/t^2$, $\varphi'(t)=0$ при $t=\pm 1$. Проходя через точку $t=-1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t=-1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max}=\varphi(-1)=-2$. Проходя через точку $t=1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t=1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min}=\varphi(1)=2$. График функции $\varphi(t)$ представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Функция $g(x)=x^5+1/x^5=\varphi(x^5)$. Поскольку функция $t=x^5$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(x^5)$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, причем $g_{\max}=g(-1)=-2$, $g_{\min}=g(1)=2$. По той же причине множеством значений функции $g(\ln x)$ также является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Множеством значений функции $g(g(\ln x))$ является множество $(-\infty;-1025/32]\cup[1025/32;+\infty)$, а функции $64g(g(\ln x))/1025$ — множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

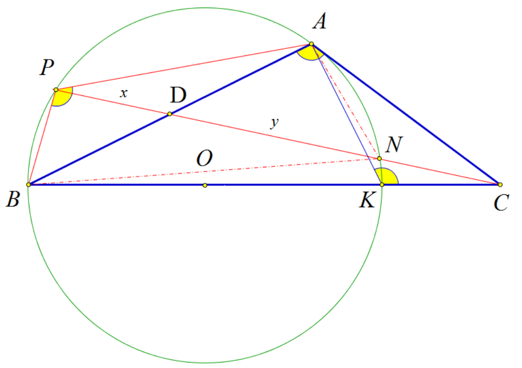


Таким образом, $g(64g(g(\ln x))/1025) \in (-\infty; -1025/32] \cup [1025/32; +\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x) = 1/g(64g(g(\ln x))/1025)$: $E_f = [-32/1025; 0) \cup (0; 32/1025]$.

Ответ: $E_f = [-32/1025; 0) \cup (0; 32/1025]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите DP, если $\angle APB = \angle BAC$.

Решение:



1) $\angle APB = \angle BAC$, $\angle APB = \angle AKC$, $\angle AKC = \angle BAC$, $\angle KAC = \angle ABC$.

Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{AC}{2} = \frac{18}{AC} \Rightarrow AC = 6, \quad AB = 15.$$

2) CD - медиана $\Rightarrow$ по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\angle ADC, \quad BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD \cos\angle ADC.$$

Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(36 + 324) - \frac{225}{4} = \frac{495}{4}, \; CD = \frac{3}{2}\sqrt{55}.$$

3) Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \neq P$).

Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $\frac{225}{4} = xy$. По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2$, $(CD - y) \cdot (CD + x) = AC^2$,

$$(\frac{3}{2}\sqrt{55} - y) \cdot (\frac{3}{2}\sqrt{55} + x) = 36.$$

4) Решаем систему уравнений $\frac{225}{4}=xy,\ \ (\frac{3}{2}\sqrt{55}-y)\cdot(\frac{3}{2}\sqrt{55}+x)=36,\ \Rightarrow\ \ y=\frac{21}{\sqrt{55}}+x\ \ \Rightarrow$

$x^2+\frac{21}{\sqrt{55}}x-\frac{225}{4}=0,\ \ x=\frac{-21+12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}},\ DP=\frac{-21+12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}}.$

Ответ: $\frac{-21+12\sqrt{89}}{2\sqrt{55}}.$

8. На прямой $x=\sqrt{3}$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

$y=x^2/4$, $M\left(\sqrt{3};y_0\right)$. Уравнение $\frac{1}{4}x^2=y_0+k\left(x-\sqrt{3}\right)$, или $x^2-4kx+4k\sqrt{3}-4y_0=0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4}=4k^2-4k\sqrt{3}+4y_0=0,\ k^2-k\sqrt{3}+y_0=0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1+k_2=\sqrt{3}$ (1), $k_1\cdot k_2=y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2-\alpha_1=60°,\ \text{tg}\left(\alpha_2-\alpha_1\right)=\sqrt{3}$ следует $\frac{\text{tg}\alpha_2-\text{tg}\alpha_1}{1+\text{tg}\alpha_2\cdot\text{tg}\alpha_1}=\sqrt{3}$, или $\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\sqrt{3}$. Отсюда, $k_2-k_1=\sqrt{3}\left(1+y_0\right)$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0,\ k_2=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0$. Из (2) следует $k_1k_2=-\frac{3}{2}y_0-\frac{3}{4}y_0^2=y_0$, $3y_0^2+10y_0=0$. Отсюда $\left(y_0\right)_1=0,\ \left(y_0\right)_2=-10/3$.

Ответ: $M_1\left(\sqrt{3};0\right),\ M_2\left(\sqrt{3};-10/3\right)$.

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений $y-1=a(x-1),\quad \frac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение:

ОДЗ: $y>0,\ x\geq 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x=y\sqrt{x}$.

I. $x=0,\ y=1-a>0$, отсюда $a<1$.

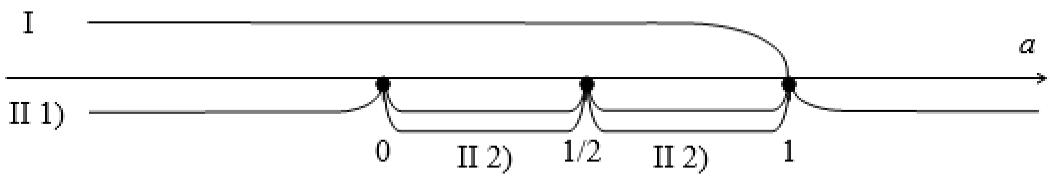
II. $x>0,\ y=\sqrt{x}$; $\sqrt{x}-1=a\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$.

1) $\sqrt{x}=1,\ x=1,\ y=1,\ a\in R$.

2) $1 = a\left(\sqrt{x}+1\right),\ \sqrt{x} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} > 0,\ 0 < a < 1$. Найденное решение $x = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2,\ y = \frac{1-a}{a}$

совпадает с предыдущим, если $1 = \frac{1}{a} - 1,\ a = \frac{1}{2}$. Итак, при

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)\quad x = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2,\ y = \frac{1-a}{a}$.



Ответ:

$a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\},\ x_1 = 0,\ y_1 = 1-a;\ x_2 = 1,\ y_2 = 1;$

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right),\ x_1 = 0,\ y_1 = 1-a;\ x_2 = 1,\ y_2 = 1;\ x_3 = \left(\frac{1-a}{a}\right)^2,\ y_3 = \frac{1-a}{a};$

$a \in [1; +\infty),\ x = 1,\ y = 1$.

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4,\ TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

Решение:

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB, то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS.

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA, то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS.

По построению общих перпендикуляров $KN = HT$, где $HT \perp CG$, и $ME = TD$, где $TD \perp CF$. В условиях всех вариантов $TA < TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB.

Если обозначить $TA = a,\ TB = b,\ TC = c$, то $CF = \sqrt{(b/2)^2 + c^2}$;

$$CS = \sqrt{TF^2 + FS^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2}, \quad h = HT = \frac{TC \cdot TG}{TG} = \frac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

$$S_{\Delta CSN} = \frac{1}{2} KN \cdot CS = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + c^2}}{2 \cdot 2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\frac{BN}{TN} = 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}$. (*)

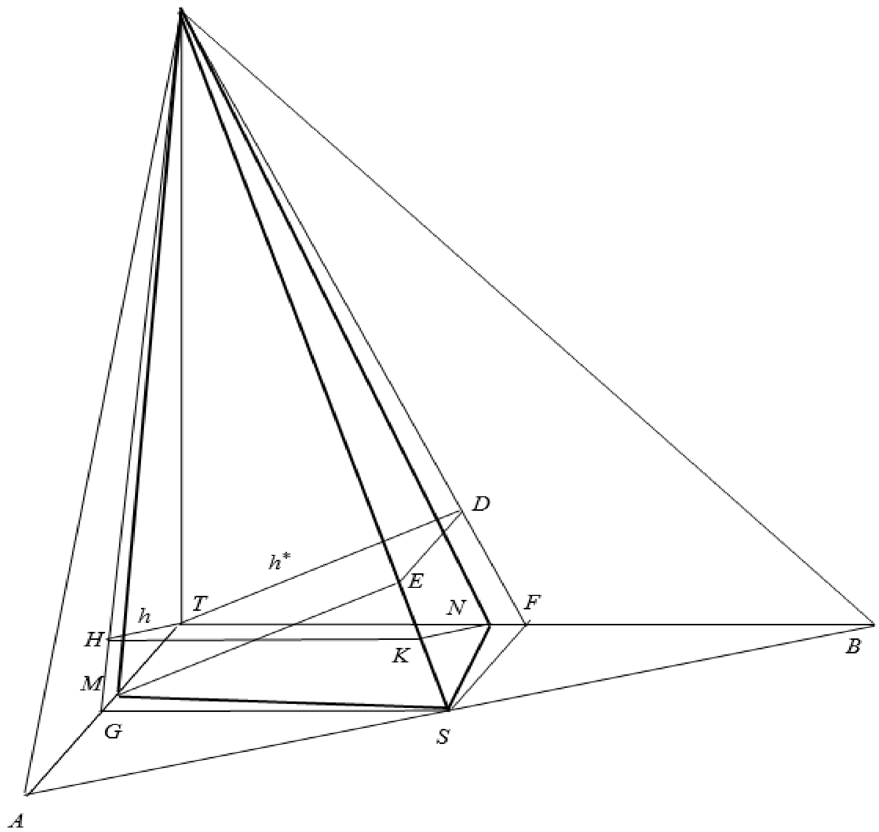
TA	*TB*	*TC*	*CS*	$S_{\Delta NCS}$	*BN:TN*	*BN*	*TN*
4	12	3	7	$21/\sqrt{13}$	17:9	108/13	54/13

(*) $\frac{HK}{GS} = \frac{CH}{CG}$; $\frac{HK}{GS} = \frac{\sqrt{TC^2 - HT^2}}{CG}$;

$$\frac{HK}{b/2} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{\sqrt{c^2 + (a/2)^2}} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2c^2/(a^2 + 4c^2)}}{\sqrt{c^2 + (a/2)^2}} = \frac{4c^2}{a^2 + 4c^2}.$$

$$TN = HK = \frac{b}{2} \cdot \frac{4c^2}{a^2 + 4c^2} = \frac{2bc^2}{a^2 + 4c^2}. \quad BN = b - \frac{2bc^2}{a^2 + 4c^2} = b\frac{a^2 + 2c^2}{a^2 + 4c^2}.$$

$$\frac{BN}{TN} = \frac{b\left(a^2 + 2c^2\right)\left(a^2 + 4c^2\right)}{\left(a^2 + 4c^2\right) \cdot 2bc^2} = \frac{a^2 + 2c^2}{2c^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}.$$



Решение варианта №28

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста

Решение: Пусть x (км/ч) - скорость велосипедиста, y (км/ч) – первоначальная скорость грузовика, t (ч) – время, затраченное грузовиком на путь от A до B. Тогда

$$\begin{cases} x(t+0,4)+0,8y=24, \\ yt=24, \\ t\geq 2, \end{cases} \Rightarrow\ x(24/y+0,4)+0,8y=24,\ \Rightarrow 2y^2+(x-60)y+60x=0.$$

Для того чтобы квадратное уравнение имело решение необходимо, чтобы $D=(x-60)^2-480x\geq 0$. Следовательно, $x^2-600x+3600\geq 0$, $D/4=\left(120\sqrt{6}\right)^2$, и

$x\in(-\infty;300-120\sqrt{6}]\cup[300+120\sqrt{6};+\infty)$. Поскольку по условию $x\in N$, и $0,2x<12$, т.е. $x<60$, то $x\in[1;300-120\sqrt{6}]\cap N$. Используя оценку $2,44<\sqrt{6}<2,45$, получаем оценку $293<120\sqrt{6}<294$, и $6<300-120\sqrt{6}<7$. Наибольшее возможное целое значение скорости $x=6$. Найдем первоначальную скорость велосипедиста при $x=6$ из уравнения $2y^2-54y+360=0,$ или $y^2-27y+180=0,$ $y_1=12,$ $y_2=15.$ Поскольку $t\geq 2,$ $t=\dfrac{24}{y}\geq 2,$ и $y\leq 12,$ то $y=12.$

Ответ: 6 км/ч, 12 км/ч.

2. Решите неравенство $\log_x(36-60x+25x^2)<0$.

Решение: $\log_x(36-60x+25x^2)<0$. ОДЗ: $x>0,\quad x\neq 1,\quad x\neq 6/5$.

1) $0<x<1;\quad 36-60x+25x^2>1 \Leftrightarrow 5x^2-12x+7>0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>7/5 \end{array}\right. \\ 0<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1;$

2) $x>1,\quad x\neq 6/5;\ 36-60x+25x^2<1 \Leftrightarrow 5x^2-12x+7<0 \Leftrightarrow 1<x<7/5,\ x\neq 6/5$.

Ответ: $x\in(0;1)\cup(1;6/5)\cup(6/5;7/5)$.

3. Два числа x и y удовлетворяют уравнению $26x^2+23xy-3y^2-19=0$ и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: Разложим на множители выражение $26x^2+23xy-3y^2$. При $y\neq 0$ имеем $y^2\left(26\left(\frac{x}{y}\right)^2+23\left(\frac{x}{y}\right)-3\right)=26y^2\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{26}\right)=(x+y)(26x-3y)$. Эта формула верна и для всех действительных чисел y. По условию задачи целые числа x и y удовлетворяют уравнению $(x+y)(26x-3y)=19$. Целые числа $x+y$ и $26x-3y$ являются делителями числа 19, причем возможны следующие случаи:

1) $\begin{cases} x+y=19, \\ 26x-3y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-19, \\ 26x-3y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=-1, \\ 26x-3y=-19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=1, \\ 26x-3y=19. \end{cases}$

Каждую систему решаем методом сложения. Умножаем обе части первого уравнения системы на 3 и складываем со вторым:

1) $\begin{cases} 29x=58, \\ x+y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 29x=-58, \\ x+y=-19; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 29x=-22, \\ x+y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 29x=22, \\ x+y=1. \end{cases}$

Системы 3) и 4) не имеют целых решений. Поскольку по условию прогрессия является убывающей, следовательно, $x<y$, этому условию удовлетворяют решения системы 2): $x=-2$, $y=-17$. Таким образом, $a_6=-2,\ a_{11}=-17$, или $a_1+5d=-2,\quad a_1+10d=-17$. Отсюда получаем $d=-3$.

Ответ: $d=-3$.

4. Решите уравнение $\dfrac{2\,\mathrm{tg}^4\,6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0$.

Решение:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}^4\,6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2}{\sqrt{\cos x-\sqrt{3}\sin x}}=0.$$

При условии $\cos x-\sqrt{3}\sin x>0$ находим корни уравнения

$2\,\mathrm{tg}^4\,6x+4\sin 4x\sin 8x-\cos 8x-\cos 16x+2=0 \quad \Leftrightarrow$

$$2\operatorname{tg}^4 6x+4\sin 4x\sin 8x-1+2\sin^2 4x-1+2\sin^2 8x+2=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^4 6x+2(\sin 4x+\sin 8x)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 6x=0, \\ \sin 4x+\sin 8x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{6}, \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \sin 6x=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi n}{6},\ n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z, \\ x=\dfrac{\pi l}{6},\ l\in Z, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi l}{6},\ l\in Z .$$

С учетом условия $\cos x-\sqrt{3}\sin x>0$ окончательно имеем $x=2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{(5\cdot 2^{-\log_x 3}-2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}} > \dfrac{(2^{-\log_x 3}-0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}$

Решение: Сделаем замену переменного $y=\log_x 3$.

$$\frac{(5\cdot 2^{-y}-2{,}5)\sqrt{2-\sqrt{y+1}}}{1+\sqrt{y+8}} > \frac{(2^{-y}-0{,}5)\sqrt{2-\sqrt{y+1}}}{\sqrt{y+8}-3}$$

$(2^{-y}-0{,}5)\left(\dfrac{5}{1+\sqrt{y+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{y+8}-3}\right)\sqrt{2-\sqrt{y+1}}>0$ Найдем ОДЗ: $y\ge -8$, $y\ne 1$, $2-\sqrt{y+1}\ge 0$ $\Rightarrow -1\le y\le 3$. Поскольку неравенство строгое, то при $-1\le y<3,\ y\ne 1$,

неравенство равносильно следующему $(-y+1)\left(\dfrac{5}{1+\sqrt{y+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{y+8}-3}\right)>0$, или

$(y-1)\left(\dfrac{4\sqrt{y+8}-16}{(1+\sqrt{y+8})(\sqrt{y+8}-3)}\right)<0$, или $\dfrac{(y-1)(y-8)}{(y-1)}<0$, или $y<8$. Таким образом, $-1\le y<1$ или $1<y<3$. Производя обратную замену, получаем

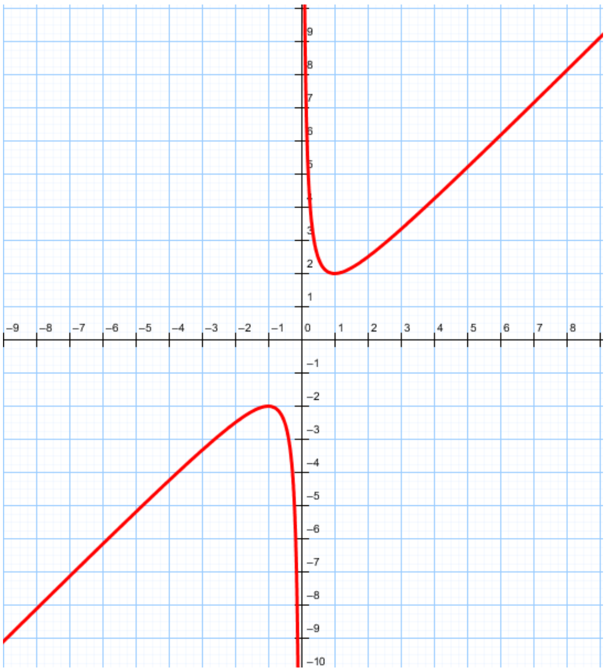
$$\begin{cases} \log_x 3\ge -1, \\ \log_x 3<3, \\ \log_x 3\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\log_3 x}{\log_3 x}\ge 0, \\ \dfrac{1-3\log_3 x}{\log_3 x}<0, \\ x\ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x>0, \\ \log_3 x\le -1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x<0, \\ \log_3 x>1/3, \end{array}\right. \\ x\ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;1/3]\cup(1;+\infty), \\ x\in(0;1)\cup(\sqrt[3]{3};+\infty), \\ x\ne 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x\in(0;1/3]\cup(\sqrt[3]{3};3)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $x\in(0;1/3]\cup(\sqrt[3]{3};3)\cup(3;+\infty)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$, где

$g(x)=\sqrt[5]{x}+1/\sqrt[5]{x}$.

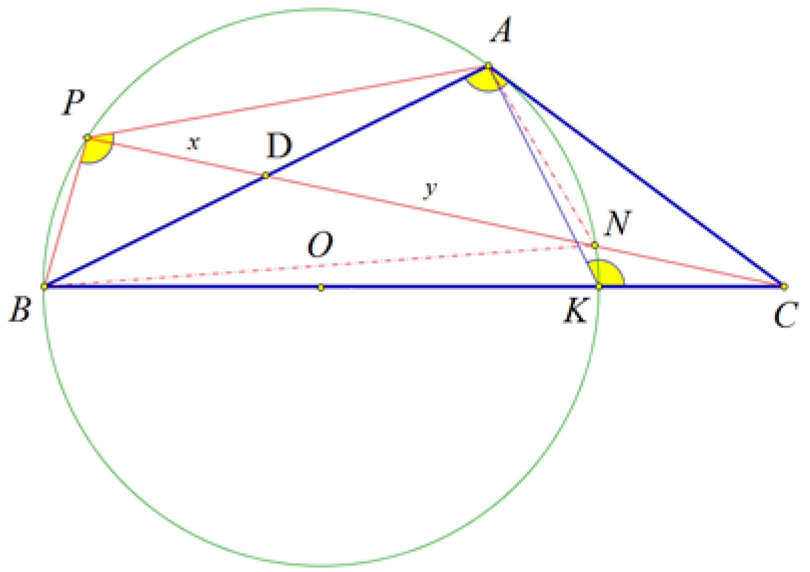


Решение: Рассмотрим сначала функцию $\varphi(t)=t+1/t$. Функция $\varphi(t)$ определена для всех $t\neq 0$. Найдем экстремумы функции $\varphi(t)$. Для того найдем интервалы знакопостоянства производной функции $\varphi(t)$: $\varphi'(t)=1-1/t^2=(t-1)(t+1)/t^2$, $\varphi'(t)=0$ при $t=\pm 1$. Проходя через точку $t=-1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $t=-1$ является точкой максимума, $\varphi_{\max}=\varphi(-1)=-2$. Проходя через точку $t=1$ производная $\varphi'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $t=1$ является точкой минимума, $\varphi_{\min}=\varphi(1)=2$. График функции $\varphi(t)$ представлен на рисунке. Множеством значений этой функции является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Функция $g(x)=\sqrt[5]{x}+1/\sqrt[5]{x}=\varphi(\sqrt[5]{x})$. Поскольку функция $t=\sqrt[5]{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$ и принимает все числовые значения, то множеством значений функции $\varphi(\sqrt[5]{x})$, следовательно, и $g(x)$, является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, причем $g_{\max}=g(-1)=-2$, $g_{\min}=g(1)=2$. По той же причине множеством значений функции $g(\log_2 x)$ также является множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Множеством значений функции $g(16g(\log_2 x))$ является множество $(-\infty;-5/2]\cup[5/2;+\infty)$, а функции $64g(16g(\log_2 x))/5$ — множество $(-\infty;-32]\cup[32;+\infty)$. Таким образом, $g(64g(16g(\log_2 x))/5)\in(-\infty;-5/2]\cup[5/2;+\infty)$. Отсюда находим множество E_f значений функции $f(x)=1/g(64g(16g(\log_2 x))/5)$: $E_f=[-2/5;0)\cup(0;2/5]$.

Ответ: $E_f=[-2/5;0)\cup(0;2/5]$.

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=8$, $BK=24$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$.

Решение:



$\angle APB = \angle BAC$, $\angle APB = \angle AKC$, $\angle AKC = \angle BAC$, $\angle KAC = \angle ABC$. Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{AC}{3} = \frac{27}{AC} \Rightarrow AC = 9, \quad AB = 24.$$

CD - медиана $\Rightarrow$ по теореме косинусов для треугольников ADC и BDC имеем

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\cos\angle ADC, \quad BC^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD \cdot CD\cos\angle ADC.$$

Так как $AD = BD$, то $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$,

$$CD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BC^2) - AD^2 = \frac{1}{2}(81 + 729) - 144 = 261, \; CD = 3\sqrt{29}.$$

Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \neq P$). Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot BT$, $144 = xy$.

По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2$, $(CD - y) \cdot (CD + x) = AC^2$, $(3\sqrt{29} - y) \cdot (3\sqrt{29} + x) = 81$.

Решаем систему уравнений $144 = xy$, $(3\sqrt{29} - y) \cdot (3\sqrt{29} + x) = 81 \Rightarrow y = \dfrac{12}{\sqrt{29}} + x \Rightarrow$

$$x^2 + \frac{12}{\sqrt{29}}x - 144 = 0, \; x = \frac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}, \; DP = \frac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: $\dfrac{-6 + 18\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$.

8. На прямой $x=1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y=x^2/4$, угол между которыми равен $45°$.

Решение:

$y=x^2/4$, $M(1;y_0)$. Уравнение $\frac{1}{4}x^2=y_0+k(x-1)$, или $x^2-4kx+4k-4y_0=0$, имеет единственное решение, если $\frac{D}{4}=4k^2-4k+4y_0=0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1+k_2=1$ (1), $k_1\cdot k_2=y_0$ (2).

Из условия $\alpha_2-\alpha_1=45°$, $\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=1$ следует $\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}=1$, или $\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=1$. Отсюда, $k_2-k_1=1+y_0$, (3).

Из (1) и (3) следует $k_1=-\frac{1}{2}y_0$, $k_2=1+\frac{1}{2}y_0$.

Из (2) следует $k_1k_2=-\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{4}y_0^2=y_0$, $y_0^2+6y_0=0$. Отсюда $(y_0)_1=0$, $(y_0)_2=-6$.

Ответ: $M_1(1;0)$, $M_2(1;-6)$.

9. Найдите все значения *a*, при которых система уравнений $2y-2=a(x-1)$, $\frac{2x}{|y|+y}=\sqrt{x}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение.

ОДЗ: $y>0,\ x\ge 0$.

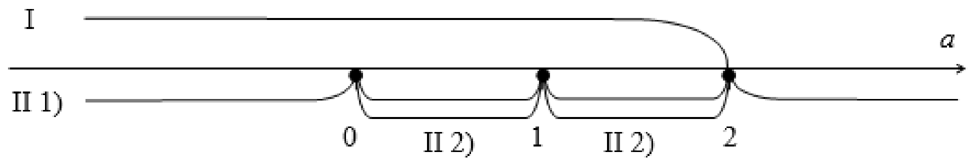
В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x=y\sqrt{x}$.

I. $x=0,\ y=1-\frac{a}{2}>0$, отсюда $a<2$.

II. $x>0,\ y=\sqrt{x}$; $2(\sqrt{x}-1)=a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$.

1) $\sqrt{x}=1,\ x=1,\ y=1,\ a\in R$.

2) $2=a(\sqrt{x}+1)$, $\sqrt{x}=\frac{2}{a}-1=\frac{2-a}{a}>0$, $0<a<2$. Найденное решение $x=\left(\frac{2-a}{a}\right)^2$, $y=\frac{2-a}{a}$ совпадает с предыдущим, если $1=\frac{2}{a}-1$, $a=1$. Итак, при $a\in(0;1)\cup(1;2)$ $x=\left(\frac{2-a}{a}\right)^2$, $y=\frac{2-a}{a}$.



Ответ:

$a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, $x_1 = 0,\ y_1 = 1 - \dfrac{a}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = 1;$

$a \in (0;1) \cup (1;2)$, $x_1 = 0,\ y_1 = 1 - \dfrac{a}{2};\ x_2 = 1,\ y_2 = 1;\ x_3 = \left(\dfrac{2-a}{a}\right)^2,\ y_3 = \dfrac{2-a}{a};$

$a \in [2; +\infty)$, $x = 1,\ y = 1.$

10. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если сторона основания $AC = 5$ и боковые ребра $TA = 4,\ TB = 12$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

Решение:

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TB, то площадь сечения будет наименьшей, если KN – общий перпендикуляр к прямым TB и CS.

Если секущая плоскость пересекает боковое ребро TA, то площадь сечения будет наименьшей, если ME – общий перпендикуляр к прямым TA и CS.

По построению общих перпендикуляров $KN = HT$, где $HT \perp CG$, и $ME = TD$, где $TD \perp CF$. В условиях всех вариантов $TA < TB$, т.е. нужно определить длину TH и положение точки N на ребре TB.

Если обозначить $TA = a,\ TB = b,\ TC = c$, то $CF = \sqrt{(b/2)^2 + c^2}$;

$$CS = \sqrt{TF^2 + FS^2} = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 + (b/2)^2}, \quad h = HT = \frac{TC \cdot TG}{TG} = \frac{ac}{2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

$$S_{\Delta CSN} = \frac{1}{2} KN \cdot CS = \frac{ac\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + c^2}}{2 \cdot 2\sqrt{(a/2)^2 + c^2}}.$$

Точка N делит отрезок TB в отношении $\dfrac{BN}{TN} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{c^2}$. (*)

TA	TB	TC	CS	S∆NCS	BN:TN	BN	TN
6	12	2	7	$21/\sqrt{13}$	11:2	132/13	24/13

(*) $\dfrac{HK}{GS}=\dfrac{CH}{CG}$; $\dfrac{HK}{GS}=\dfrac{\sqrt{TC^2-HT^2}}{CG}$;

$$\frac{HK}{b/2}=\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2-a^2c^2/(a^2+4c^2)}}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}=\frac{4c^2}{a^2+4c^2}.$$

$$TN=HK=\frac{b}{2}\cdot\frac{4c^2}{a^2+4c^2}=\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}.\ BN=b-\frac{2bc^2}{a^2+4c^2}=b\frac{a^2+2c^2}{a^2+4c^2}.$$

$$\frac{BN}{TN}=\frac{b\left(a^2+2c^2\right)\left(a^2+4c^2\right)}{\left(a^2+4c^2\right)\cdot 2bc^2}=\frac{a^2+2c^2}{2c^2}=1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}.$$