

Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету
«Математика», 9 класс, февраль 2016 г.

Вариант № 1

1. (10 баллов). Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город N . В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на поездку будут состоять из «транспортных», «проживания-питания» и «экскурсионных», соотношение между которыми 3:2:1, соответственно. Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город N через не менее исторический город K . Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20%, а «проживание-питание» и «экскурсии» подорожали на 20% каждая составная часть.

2. Каким стало соотношение между расходными частями поездки «транспортной», «проживание-питание» и «экскурсионной»?

3. (10 баллов). Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$\frac{(3x^2+2xy-y^2)^{2016}+(x^2-4x+3)^{1580}}{\sqrt{28-3y-y^2} \cdot (y^3+y^2+9y+9)} = 0.$$

4. (15 баллов). Докажите, что число $\sqrt{2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 + 81}$ является целым.

5. (15 баллов). $A_1A_2 \dots A_{2015}$ - правильный 2015-угольник. O – его центр. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2015}}$. Ответ обоснуйте.

6. (15 баллов). При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} (y-3)^2 - (x-1)^2 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 = a \end{cases}$$
 имеет нечётное число различных решений?

7. (15 баллов). В угол 60° вписана окружность радиуса 1. Вторая окружность касается сторон угла и первой окружности. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

8. (20 баллов). В городе Математинске проживают только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Город разделён на четыре округа: Северный, Западный, Южный и Восточный. На вопрос: «Вы живёте в Северном округе?» ответили «да» 610 человек, на вопрос: «Вы живёте в Западном округе?» сказали «да» 680 человек, на вопрос: «Вы живёте в Южном округе?» ответили «да» 690 человек, а на вопрос: «Вы живёте в Восточном округе?» сказали «да» 600 человек. На следующий день в Южном и Восточном округах проходил карнавал: лжецы переоделись в рыцарей и стали говорить правду, а рыцари переоделись в лжецов и стали лгать (в Северном и Западном округах в этот день карнавал не

проводился). В результате на вопрос «Вы живёте в Северном округе?» в этот день ответили «да» 620 человек.

а) Сколько лжецов проживает в Математинске?

б) Сколько всего жителей в Математинске?

**Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету
«Математика», 9 класс, февраль 2016 г.**

Вариант № 2

1. (10 баллов). Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город **К**. В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на «транспорт» составят половину общей суммы на поездку, а на расходы на «проживание-питание» будут в 2 раза больше «экскурсионных». Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город **К** через не менее исторический город **Н**. Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20%, а соотношение между «транспортом», «проживанием-питанием» и «экскурсиями» стало 2:2:1.

2. На сколько процентов изменились расходы на «проживание-питание» и «экскурсии», если известно, что они увеличились на одно и то же число?

3. (10 баллов). Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$\frac{(x^2+4x-5)^{2016}+(2x^2+xy-y^2)^{1580}}{(y^3+y^2+4y+4)\cdot\sqrt{21+4y-y^2}} = 0.$$

4. (15 баллов). Докажите, что число $\sqrt{2013 \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 16}$ является целым.

5. (15 баллов). $A_1A_2 \dots A_{2017}$ - правильный 2017-угольник. O – его центр. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2017}}$. Ответ обоснуйте.

6. (15 баллов). При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} (x+3)^2 - (y+2)^2 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$
 имеет нечётное число различных решений?

7. (15 баллов). В угол BCA вписана окружность радиуса 1 с центром в точке O_1 . Синус угла O_1CA равен $\frac{1}{3}$. Вторая окружность касается первой окружности и сторон угла. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

8. (20 баллов). В учебном центре учатся только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. В учебном центре четыре кружка: математики, физики, информатики и химии. Каждый слушатель учебного центра посещает ровно один кружок. На вопрос «Вы посещаете кружок математики?» ответили «да» 290 человек; на вопрос «Вы

посещаете кружок физики?» сказали «да» 250 человек; на вопрос «Вы посещаете кружок информатики?» ответили «да» 260 человек, а на вопрос «Вы посещаете кружок химии?» сказали «да» 310 человек. Перед новым годом среди посетителей кружков информатики и химии провели маскарад: лжецы переоделись рыцарями и стали говорить только правду, а рыцари переоделись лжецами и стали лгать. Среди посетителей кружков математики и физики маскарад не проводился. В результате на вопрос «Вы посещаете кружок математики?» в этот день ответили «да» 310 человек.

- а)** Сколько лжецов посещают учебный центр?
- б)** Сколько всего учащихся посещают учебный центр?