Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников «Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету «Математика», 10 класс, февраль 2016 г.

Вариант № 1

1. Сравните числа $\left(\dfrac{2016}{2017}\right)^4$ и $\left(\dfrac{2015}{2016}\right)^5$.

2. Вычислить $\dfrac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, где $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{2016}{1580}}-\sqrt{\dfrac{1580}{2016}}\right)$.

3. На новогодний корпоратив четверо сотрудников привели по одному ребенку. Для них в течение вечера разыгрывали шесть подарков. Какова вероятность, что ни один ребенок не ушел с праздника без подарка?

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{79+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{85-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0$.

5. Найти при каких a уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x+\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x+3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x+7\sin x+12}=a$$

не имеет решений?

6. Цена на товар повышалась в последний день каждого месяца на 5, $4\frac{1}{6}$, $2\frac{6}{7}$ или $6\frac{2}{3}$ процентов. Сколько прошло месяцев к тому моменту, когда первоначальная цена товара увеличилась ровно на 50%?

7. Решить неравенство: $\dfrac{2}{\sqrt{x}+x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x^2}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}+1}\geq 3$.

8. В остроугольном треугольнике ABC $\angle B=75^\circ$, длина $AC=2$ см, H – точка пересечения его высот. Площадь треугольника AHC равна $\sqrt{12}-3$ см^2. Найти площадь треугольника ABC.

Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников «Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету «Математика», 10 класс, февраль 2016 г.

Вариант № 2

1. Сравните числа $\left(\frac{1579}{1580}\right)^7$ и $\left(\frac{1580}{1581}\right)^6$.

2. Вычислить $\frac{1580\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-x}$, где $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2016}{1580}}+\sqrt{\frac{1580}{2016}}\right)$.

3. Карабас-Барабас, лиса Алиса и кот Базилио нашли пять золотых монет и в течении ночи разыграли каждую из них случайным образом. Какова вероятность, что никто из них не ушел с поля без монет?

4. Решите уравнение $\sqrt[6]{77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}}-\sqrt[6]{83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}}=0$.

5. Найти при каких a уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x-3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x-5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x-7\sin x+12}=a$$

не имеет решений?

6. Цена на товар повышалась в последний день каждого месяца на 10, $6\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{6}$ или $12,5$ процентов. Сколько прошло месяцев к тому моменту, когда первоначальная цена товара увеличилась ровно на $83\frac{1}{3}\%$?

7. Решить неравенство: $\frac{2}{\sqrt[4]{x}+x}+\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+x}+\frac{2x}{\sqrt[4]{x}+1}\le 3$.

8. В треугольнике AFC $\angle F=105^\circ$, длина $AC=\sqrt{6}$ см, B – точка пересечения его высоты FK с описанной около него окружностью. Площадь треугольника AFC равна $\sqrt{27}-4$ см^2. Найти площадь треугольника ABC.

Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету

«Математика», 10 класс, март 2016 г.

Вариант № 3

1. Сравните числа $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}}$, где x - среднее гармоническое чисел $a=\frac{2016+2015}{2016^2+2016\cdot 2015+2015^2}$ и $b=\frac{2016-2015}{2016^2-2016\cdot 2015+2015^2}$.

Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число c, такое что $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

3. Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислите её площадь $x^2+y^2+4\left(x-|y|\right)\le 0$.

4. На шахматной доске 8х8 расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» - это шашка, которая перевернута нечетное количество раз. Сколько «Дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от нее?

5. Решите уравнение

$$\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1\right)=\left(x^7+x^6+\ldots+x+1\right)^2.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}+x=a$?

7. Докажите неравенство $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030}\le 2015\sqrt{2016}$.

8. В остроугольном треугольнике АВС угол В = 75^0. На стороне АС выбирается точка К. Около треугольников АВК и СВК описываются окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найдите радиус окружности, описной около треугольника АВС, если наименьшая из возможных длина отрезка O_1O_2 = 2 см.