Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету

Решения, ответы, критерии проверки заданий 9 класса

Вариант №1.

№1: Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город $\boldsymbol{N}$. В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на поездку будут состоять из «транспортных», «проживание-питание» и «экскурсионных», соотношение между которыми 3:2:1, соответственно. Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город $\boldsymbol{N}$ через не менее исторический город $\boldsymbol{K}$. Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20%, а «проживание-питание» и «экскурсии» подорожали на 20% каждая составная часть.

Каким стало соотношение между расходными частями поездки «транспортной», «проживание-питание» и «экскурсионной»?

Ответ: 2:2:1.

Решение: пусть затраты на «экскурсии» по первоначальному плану равны x денежных единиц, тогда затраты на «проживание-питание» составили 2x, а на «транспорт» - 3x. По второй версии – расходы на транспорт составили 0,8·3x=2,4x, на «проживание-питание» - 1,2·2x=2,4x, а на «экскурсии» - 1,2x. Новое соотношение стало 2,4x:2,4x:1,2x, или, после сокращения на 1,2x, получаем 2:2:1.

Ответ: 2:2:1.

Баллы	**Условия выставления**
10	Обоснованно получен верный ответ.
5	Верно составлено уравнение или система уравнений, но при решении допущена арифметическая ошибка или дан ответ не на вопрос задачи.
0	Все остальные случаи.

№2: Найдите все пары чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих уравнению $\frac{(3x^2+2xy-y^2)^{2016}+(x^2-4x+3)^{1580}}{\sqrt{28-3y-y^2}\cdot(y^3+y^2+9y+9)}=0.$

Ответ: {(1;3);(3;-3)}.

Решение: поскольку дробь равна нулю, если числитель равен нулю и выполнено ОДЗ, а сумма двух чётных степеней равна нулю, если каждое из двух выражений, возводимых в эти степени, равно нулю, то наше уравнение равносильно следующей системе:

$\begin{cases} \mathbf{3x^2+2xy-y^2=0} \\ \mathbf{x^2-4x+3=0} \\ \mathbf{28-3y-y^2>0} \\ \mathbf{y^3+y^2+9y+9\neq 0} \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)\cdot(3x-y)=0 \quad (1) \\ (x-1)\cdot(x-3)=0 \quad (2) \\ -(y+7)\cdot(y-4)>0 \quad (3) \\ (y+1)\cdot(y^2+9)\neq 0 \quad (4) \end{cases}$ Из уравнений (1) и (2) получаем четыре пары: (1; -1); (1; 3); (3; -3) и (3; 9). Пара (1; -1) не подходит по условию (4), а пара (3; 9) не подходит по условию (3). В ответ войдут пары (1; 3) и (3; -3).

Ответ: {(1; 3); (3; -3)}.

Баллы	Условия выставления
10	Обоснованно получен верный ответ.
5	Найдены все пары (x, y), при которых числитель обращается в нуль, но не учтено ОДНО ИЗ УСЛОВИЙ ОДЗ (преобретено ОДНО лишнее решение).
0	Все остальные случаи, в том числе если не учтены сразу два условия ОДЗ.

№3: Докажите, что число $\sqrt{2013\cdot 2016\cdot 2019\cdot 2022+81}$ является целым.

Доказательство: (в общем виде): $\sqrt{n\cdot(n+3)\cdot(n+6)\cdot(n+9)+81}$= (первое с четвёртым, второе с третьим) =$\sqrt{(n^2+9n)\cdot(n^2+9n+18)+9^2}$=$\sqrt{(n^2+9n)^2+18\cdot(n^2+9n)+9^2}$=$\sqrt{(n^2+9n+9)^2}$=== n^2+9n+9 - целое. (А если конкретно, то получится $2013^2+9\cdot 2013+9$).

Баллы	Условия выставления
15	Верно доказано неравенство.
10	Арифметическая (вычислительная) погрешность при доказательстве, что выражение под корнем является полным квадратом, или ученик доказал, что выражение под корнем является полным квадратом, но забыл вычислить из него корень.
0	Все остальные случаи.

№4: $A_1A_2 \dots . A_{2015}$ - правильный 2015-угольник. O – его центр. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2015}}$. Ответ обоснуйте.

Ответ: $\vec{0}$.

В общем виде: докажем, что сумма радиус-векторов правильного n-угольника равна $\vec{0}$.

Первый способ (через сложение векторов): угол между соседними векторами равен $\frac{360°}{n}$. А если приложить вектор $\overrightarrow{OA_2}$ к концу вектора $\overrightarrow{OA_1}$ (правило треугольника), то получившийся угол будет равен $180° - \frac{360°}{n} = 180° \cdot \frac{n-2}{n}$. Такой же угол $(180° \cdot \frac{n-2}{n})$ будет и между соседними сторонами правильного n-угольника. Таким образом, если складывать векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, то получатся две стороны правильного n-угольника (см. рис. 4.1), если к концу второго вектора приложить вектор $\overrightarrow{OA_3}$ (правило многоугольника), то получатся три стороны правильного n-угольника и т.д. В результате, если сложить все n векторов, то получится правильный n-угольник, и, по правилу n-угольника, сумма векторов будет равна $\vec{0}$.

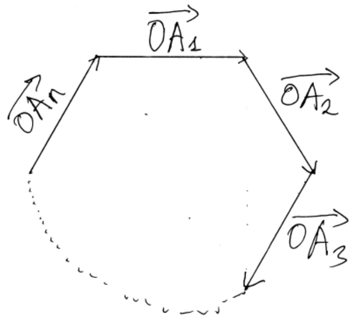

рис. 4.1

Ответ: $\vec{0}$.

Второй способ (через повороты): пусть сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ равна вектору $\vec{p}$ (см. рис 4.2). Заметим, что $< A_1OA_2 =< A_2OA_3 =\cdots=< A_nOA_1 = \frac{360°}{n}$. Сделаем поворот правильного n-угольника с центром в точке O на угол $\frac{360°}{n}$ (например, на угол A_1OA_2) (можно повернуть на угол, кратный $\frac{360°}{n}$). При этом вектор $\overrightarrow{OA_1}$ перейдёт в вектор $\overrightarrow{OA_2}$, вектор $\overrightarrow{OA_2}$ – в вектор $\overrightarrow{OA_3}$ и т.д., вектор $\overrightarrow{OA_n}$ – в $\overrightarrow{OA_1}$. В результате n-угольник перейдёт сам в себя, следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ не изменится, а суммарный вектор $\vec{p}$ перейдёт в вектор $\overrightarrow{p_1}$. Если $\vec{p} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{p} \neq \overrightarrow{p_1}$, т.к. они неколлинеарны. Единственный вариант, когда $\vec{p} = \overrightarrow{p_1}$, это $\vec{p} = \vec{0}$.

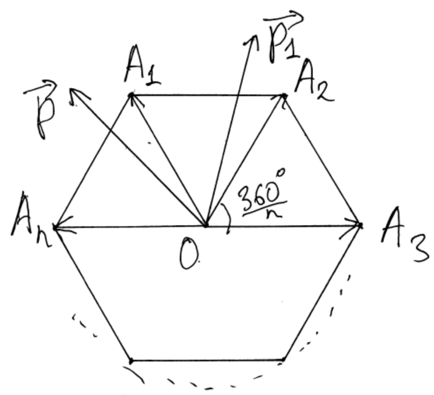

рис. 4.2

Ответ: $\vec{0}$.

Баллы	**Условия выставления**
15	Обоснованно получен верный ответ
10	Всё выполнено верно, но в ответе записан 0, а не $\vec{0}$.

5	**Векторно:** указано, что ответом будет $\vec{0}$, сделана попытка построить сумму векторов, но автору решения на удалось доказать, что сумма векторов = $\vec{0}$; **Через повороты:** получен верный ответ $\vec{0}$, показано, что при повороте фигуры на угол $\frac{360°}{n}$ (или на кратный ему угол) сумма векторов не изменится, но не обоснованно утверждение, что сумма векторов = $\vec{0}$.
0	Все остальные случаи.

№5: При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(y-3)^2-(x-1)^2=0\\(x-4)^2+(y+1)^2=a\end{cases}$ имеет нечётное число различных решений?

Ответ: $\{\frac{1}{2}; \frac{49}{2}; 25\}$**.**

Решение: преобразуем первое уравнение: $(y-3)^2-(x-1)^2=(y-3-x+1)\cdot(y-3+x-1)=(y-x-2)\cdot(y+x-4)=0$.

Получилось объединение двух прямых: $y=x+2$ и $y=4-x$ (рис. 5.1).

Рассмотрим второе уравнение: при $a<0$ получается пустое множество, при $a=0$ получается одна точка O(4; -1). При $a>0$ получается семейство окружностей с центром в точке O(4; -1) и радиусом $\sqrt{a}$ $(r^2=a)$. Нечётное число решений может быть в одном из трёх случаев: 1) окружность касается прямой $y=4-x$ (это будет при $a=\frac{1}{2}$ $(r=\frac{1}{\sqrt{2}})$), при этом значении a система имеет одно решение; 2) окружность касается прямой $y=x+2$ (это будет при $a=\frac{49}{2}$ $(r=\frac{7}{\sqrt{2}})$), при этом значении a система имеет 3 различных решения (две точки пересечения с прямой $y=4-x$ и одну точку пересечения с прямой $y=x+2$; 3) окружность проходит через точку С (1; 3) пересечения прямых $y=4-x$ и $y=x+2$ (это будет при $a=25$ $(r=5)$), при этом значении a система имеет 3 различных решения (точка С и ещё по одной точке пересечения окружности с каждой из прямых). Ключевые положения окружностей изображены на рис. 5.1. Значения $a=\frac{1}{2}$ $(r=\frac{1}{\sqrt{2}})$, $a=\frac{49}{2}$ $(r=\frac{7}{\sqrt{2}})$ и $a=25$ $(r=5)$ можно найти различными как геометрическими, так и алгебраическими способами, которые хорошо известны преподавателям.

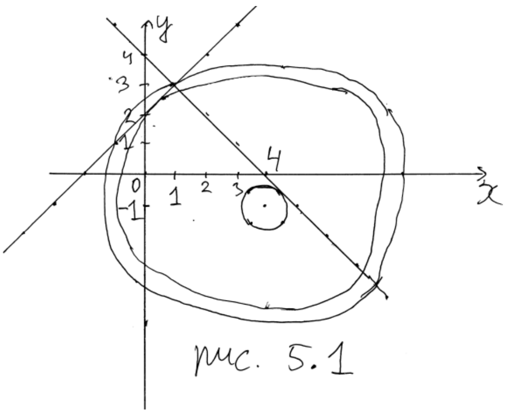

рис. 5.1

Ответ: $\{\frac{1}{2}; \frac{49}{2}; 25\}$.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен верный ответ.
10	Обоснованно получены любые два из трёх значений.
5	Указано, что первое уравнение задаёт две пересекающиеся прямые (и эти прямые построены), а второе уравнение задаёт окружности с радиусом $\sqrt{a}$ $(r^2 = a)$.
0	Остальные случаи.

№6: В угол 60° вписана окружность радиуса 1. Вторая окружность касается сторон угла и первой окружности. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

Ответ: $\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$ **или** $\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}$.

Решение: 1) как известно, центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла. Пусть C – вершина угла, O_1 – центр первой окружности.

Ситуация один: центр второй окружности O_2 лежит за пределами отрезка CO_1 (см. рис. 6.1). Пусть F – точка касания первой окружности (с центром O_1) с одной из сторон угла, а G – точка касания второй окружности (с центром O_2) с той же стороной угла, P – точка касания этих окружностей. Т.к. искомый угол равен 60°, то углы O_1CF и O_2CG равны 30°. Тогда из прямоугольного треугольника O_1CF $CO_1 = 2 \cdot O_1F = 2$, а CP=3. Пусть радиус окружности с центром O_2 равен R. Тогда $CO_2 = 3 + R$, $O_2G = R$. Из прямоугольного треугольника с углом 30° O_2CG получаем: $CO_2 = 2 \cdot O_2G$, т.е. $3 + R = 2 \cdot R$, откуда R=3. Найдём отрезок FG. Для этого проведём через центр первой окружности O_1 перпендикуляр O_1M на радиус O_2G. Тогда в прямоугольном треугольнике O_1MO_2 $O_1O_2 = O_1P + PO_2 = 1 + 3 = 4$, $O_2M = O_2G - MG = 3 - 1 = 2$. Тогда по теореме Пифагора $O_1M = \sqrt{{O_1O_1}^2 - O_2M^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} = FG$. Теперь через центр искомой третьей окружности O_3 проведём прямую, параллельную прямой FG. Пусть эта прямая пересекает радиус O_1F в точке K, а радиус O_2G в точке N. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1KO_3. Обозначим радиус искомой окружности r. Тогда $O_1O_3 =$

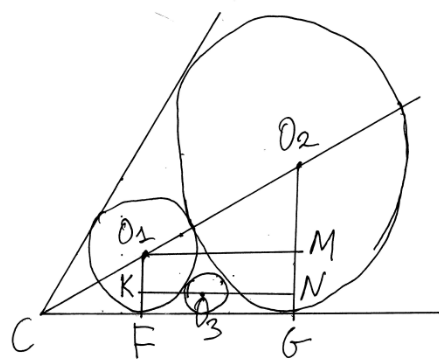

рис. 6.1

$r+1$, $O_1K = 1-r$. По теореме Пифагора $KO_3 = \sqrt{{O_1O_3}^2 - O_1K^2} = \sqrt{(r+1)^2-(1-r)^2} = 2\sqrt{r}$. А теперь из прямоугольного треугольника O_3NO_2 имеем: $O_3O_2 = r+3$, $O_2N = O_2G - NG = 3-r$. По теореме Пифагора $O_3N = \sqrt{{O_3O_2}^2 - O_3N^2} = \sqrt{(r+3)^2-(3-r)^2} = 2\sqrt{3}\sqrt{r}$. Т.к. $FG = KN = KO_3 + O_3N$, то $2\sqrt{3} = 2\sqrt{r} + 2\sqrt{3}\sqrt{r}$, откуда $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ и $r = \frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}$.

Ответ ситуации 1: $\frac{3}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{3}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{4} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{2}$ (для удобства проверяющих записал возможные записи правильного ответа).

Ситуация два: центр второй окружности O_2 лежит на отрезке CO_1 (см. рис. 6.2). В этом случае получится картинка, подобная той, что была в ситуации один (рис. 6.1), но теперь большей будет первая окружность (с центром O_1). Коэффициент подобия картинок равен $\frac{1}{3}$, поэтому легко рассчитать все элементы чертежа, включая ответ. Так, $R = \frac{1}{3}$; $FG = \frac{2\sqrt{3}}{3} = O_1M$; $r = \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}$.

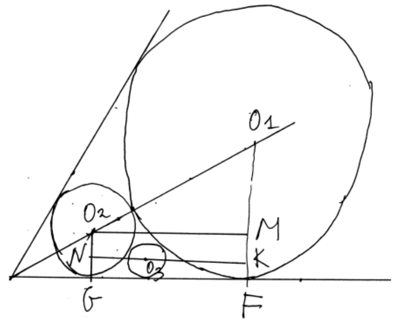

рис. 6.2

Ответ ситуации два: $\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^3}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{3}{(1+\sqrt{3})^2}}$ **или** $\mathbf{\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}}$.

Баллы	**Условия выставления**
15	Обоснованно получены верные ответы в обеих ситуациях.
10	Обоснованно получен верный ответ только в одной из двух ситуаций.
5	Сделаны существенные продвижения в решении задачи, например, хотя бы в одной из ситуаций верно найден радиус второй окружности и отрезок FG (или равный ему отрезок), но не найден ни один верный ответ ни в одной из ситуаций.
0	Остальные случаи.

№7: В городе Математинске проживают только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Город разделён на четыре округа: Северный, Западный, Южный и Восточный. На вопрос: «Вы живёте в Северном округе?» ответили «да» 610 человек, на вопрос:

«Вы живёте в Западном округе?» сказали «да» 680 человек, на вопрос: «Вы живёте в Южном округе?» ответили «да» 690 человек, а на вопрос: «Вы живёте в Восточном округе?» сказали «да» 600 человек. На следующий день в Южном и Восточном округах проходил карнавал: лжецы переоделись в рыцарей и стали говорить правду, а рыцари переоделись в лжецов и стали лгать (в Северном и Западном округах в этот день карнавал не проводился). В результате на вопрос «Вы живёте в Северном округе?» в этот день ответили «да» 620 человек.
а) Сколько лжецов проживает в Математинске?
б) Сколько всего жителей в Математинске?

Ответ: а) 640 лжецов, б) 1300 жителей.

Решение: пусть $r_{\text{С}}$, $r_{\text{З}}$, $r_{\text{Ю}}$ и $r_{\text{В}}$ – число рыцарей , соответственно, в Северном, Западном, Южном и Восточном округах, $l_{\text{С}}$, $l_{\text{З}}$, $l_{\text{Ю}}$ и $l_{\text{В}}$ – аналогично для лжецов.

Составим систему уравнений:

$\mathrm{r}_{\text{С}} + \mathrm{l}_{\text{З}} + \mathrm{l}_{\text{Ю}} + \mathrm{l}_{\text{В}} = 610$ (1)

$l_{\text{С}} + r_{\text{З}} + \mathrm{l}_{\text{Ю}} + \mathrm{l}_{\text{В}} = 680$ (2)

$l_{\text{С}} + \mathrm{l}_{\text{З}} + r_{\text{Ю}} + \mathrm{l}_{\text{В}} = 690$ (3)

$l_{\text{С}} + \mathrm{l}_{\text{З}} + \mathrm{l}_{\text{Ю}} + r_{\text{В}} = 600$ (4)

$\mathrm{r}_{\text{С}} + \mathrm{l}_{\text{З}} + r_{\text{Ю}} + r_{\text{В}} = 620$ (5)

Например, на вопрос, «Вы живёте в Западном округе?» сказали «да» рыцари Западного округа и лжецы Северного, Южного и Восточного округов (уравнение (2)).

$(2) - (1)$: $(l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) - (l_{\text{З}} - r_{\text{З}}) = 70$ (а)

$(3) - (1)$: $(l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) - (l_{\text{Ю}} - r_{\text{Ю}}) = 80$ (б)

$(4) - (1)$: $(l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) - (l_{\text{В}} - r_{\text{В}}) = -10$ (в)

$(1) - (5)$: $(l_{\text{Ю}} - r_{\text{Ю}}) + (l_{\text{В}} - r_{\text{В}}) = -10$ (г)

Из уравнения (б) выражаем $(l_{\text{Ю}} - r_{\text{Ю}}) = (l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) - 80$, а из уравнения (в) $(l_{\text{В}} - r_{\text{В}}) = (l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) + 10$ и подставляем в уравнение (г): $(l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) - 80 + (l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) + 10 = -10$, откуда $(l_{\text{С}} - r_{\text{С}}) = 30$.

Прибавим к уравнению (1) $(l_С - r_С)$, получим $\mathrm{r}_С + \mathrm{l}_З + \mathrm{l}_Ю + \mathrm{l}_В + l_С - r_С = 610 + 30$; $\mathrm{l}_З + \mathrm{l}_Ю + \mathrm{l}_В + l_С = 640$.

Ответ а): 640 лжецов.

Из уравнения (а): $(l_З - r_З) = (l_С - r_С) - 70 = 30 - 70 = -40$, откуда $r_З - l_З = 40$.

Сложим уравнение (5) с $r_З - l_З$, получим $\mathrm{r}_С + \mathrm{l}_З + r_Ю + r_В + r_З - l_З = 620 + 40$, т.е. $\mathrm{r}_С + r_Ю + r_В + r_З = 660$. Таким образом, в городе Математинске проживают 660 пыцарей.

Всего в Математинске 640+660=1300 жителей.

Ответ б) 1300 жителей.

Ответ: а) 640 лжецов, б) 1300 жителей.

Баллы	**Условия выставления**
20	Обоснованно получены верные ответы на оба вопроса задачи.
15	Обоснованно получен верный ответ на один из двух вопросов задачи.
10	Верно составлена система уравнений и найдена хотя бы одна разность между числом лжецов и числом рыцарей (или наоборот).
5	Верно составлена система уравнений.
0	Все остальные случаи.

Решения, ответы, критерии проверки заданий 9 класса

Вариант №2.

№1. Во время зимних каникул компания друзей решила воспользоваться услугами железной дороги и посетить исторический город ***K***. В результате проведенных маркетинговых исследований они выяснили, что расходы на «транспорт» составят половину общей суммы на поездку, а на расходы на «проживание-питание» будут в 2 раза больше «экскурсионных». Однако, один из друзей предложил заменить поезд автобусом и проехать в город ***K*** через не менее исторический город ***N***. Предложение было принято. В результате расходы на «транспорт» уменьшились на 20%, а соотношение между «транспортом», «проживание-питание» и «экскурсиями» стало 2:2:1.

На сколько процентов изменились расходы на «проживание-питание» и «экскурсии», если известно, что они увеличились на одно и то же число?

Ответ: 20%.

Решение: пусть x денежных единиц – расходы на «экскурсии» по первой версии, тогда расходы на «питание-проживание» - 2x, а на транспорт – 2x+x=3x. По второй версии расходы на «транспорт» составили 0,8·3x=2,4x. Пусть расходы на «питание-проживание» и на «экскурсии» увеличились на p%. Тогда они составили $2x\cdot(1+\frac{p}{100})$ и $x\cdot(1+\frac{p}{100})$ соответственно. Получаем соотношение: $2{,}4x: 2x\left(1+\frac{p}{100}\right): x\left(1+\frac{p}{100}\right)=2:2:1$. Делим на 2x, получаем $\frac{1{,}2}{1+\frac{p}{100}}=\frac{2}{2}=1$, откуда $1{,}2=1+\frac{p}{100}$. p=20%.

Ответ: 20%.

Баллы	**Условия выставления**
10	Обоснованно получен верный ответ.
5	Верно составлено уравнение или система уравнений, но при решении допущена арифметическая ошибка или дан ответ не на вопрос задачи.
0	Все остальные случаи.

№2: Найдите все пары чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющих уравнению $\frac{(x^2+4x-5)^{2016}+(2x^2+xy-y^2)^{1580}}{(y^3+y^2+4y+4)\cdot\sqrt{21+4y-y^2}}=0$.

Ответ: {(-5; 5); (1; 2)}.

Решение: поскольку дробь равна нулю, если числитель равен нулю и выполнено ОДЗ, а сумма двух чётных степеней равна нулю, если каждое из двух выражений, возводимых в эти степени, равно нулю, то наше уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2+4x-5=0 \\ 2x^2+xy-y^2=0 \\ y^3+y^2+4y+4\neq 0 \\ 21+4y-y^2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)\cdot(x-1)=0 & (1) \\ (x+y)\cdot(2x-y)=0 & (2) \\ (y+1)\cdot(y^2+4)\neq 0 & (3) \\ (y+3)\cdot(y-7)<0 & (4) \end{cases}$$

Из уравнений (1) и (2) получаем четыре пары: (-5; 5); (-5; -10); (1; -1); (1; 2). Пара (-5; -10) не подходит по неравенству (4), а пара (1; -1) не подходит по неравенству (3). В ответ войдут пары (-5; 5) и (1; 2).

Ответ: {(-5; 5); (1; 2)}.

Баллы	**Условия выставления**
10	Обоснованно получен верный ответ.
5	Найдены все пары (x, y), при которых числитель обращается в нуль, но не учтено ОДНО ИЗ УСЛОВИЙ ОДЗ (преобретено ОДНО лишнее решение).
0	Все остальные случаи, в том числе если не учтены сразу два условия ОДЗ.

№3: Докажите, что число $\sqrt{2013\cdot 2015\cdot 2017\cdot 2019+16}$ является целым.

Доказательство: (в общем виде): $\sqrt{n\cdot(n+2)\cdot(n+4)\cdot(n+6)+16}$= (первое с четвёртым, второе с третьим) =$\sqrt{(n^2+6n)\cdot(n^2+6n+8)+4^2}$=$\sqrt{(n^2+6n)^2+8\cdot(n^2+6n)+4^2}$=$\sqrt{(n^2+6n+4)^2}$=

=n^2+6n+4 - целое. (А если конкретно, то получится $2013^2+6\cdot 2013+4$).

Баллы	**Условия выставления**
15	Верно доказано неравенство.
10	Арифметическая (вычислительная) погрешность при доказательстве, что выражение под корнем является полным квадратом, или ученик доказал, что выражение под корнем является полным квадратом, но забыл вычислить из него корень.
0	Все остальные случаи.

№4: $A_1A_2\ldots.A_{2017}$ - правильный 2017-угольник. O – его центр. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2017}}$. Ответ обоснуйте.

Ответ: $\vec{0}$.

В общем виде: докажем, что сумма радиус-векторов правильного n-угольника равна $\vec{0}$.

Первый способ (через сложение векторов): угол между соседними векторами равен $\frac{360°}{n}$. А если приложить вектор $\overrightarrow{OA_2}$ к концу вектора $\overrightarrow{OA_1}$ (правило треугольника), то получившийся угол будет равен $180° - \frac{360°}{n} = 180° \cdot \frac{n-2}{n}$. Такой же угол ($180° \cdot \frac{n-2}{n}$) будет и между соседними сторонами правильного n-угольника. Таким образом, если складывать векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$, то получатся две стороны правильного n-угольника (см. рис. 4.1), если к концу второго вектора приложить вектор $\overrightarrow{OA_3}$ (правило многоугольника), то получатся три стороны правильного n-угольника и т.д. В результате, если сложить все n векторов, то получится правильный n-угольник, и, по правилу n-угольника, сумма векторов будет равна $\vec{0}$.

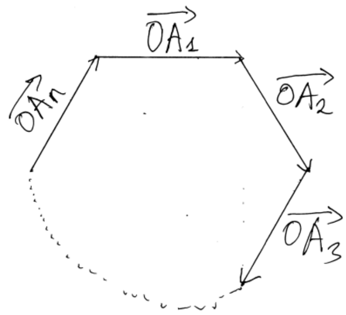

рис. 4.1

Ответ: $\vec{0}$.

Второй способ (через повороты): пусть сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ равна вектору $\vec{p}$ (см. рис 4.2). Заметим, что $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots = \angle A_nOA_1 = \frac{360°}{n}$. Сделаем поворот правильного n-угольника с центром в точке O на угол $\frac{360°}{n}$ (например на угол A_1OA_2) (можно повернуть на угол, кратный $\frac{360°}{n}$). При этом вектор $\overrightarrow{OA_1}$ перейдёт в вектор $\overrightarrow{OA_2}$, вектор $\overrightarrow{OA_2}$ – в вектор $\overrightarrow{OA_3}$ и т.д., вектор $\overrightarrow{OA_n}$ – в $\overrightarrow{OA_1}$. В результате n-угольник перейдёт сам в себя, следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ не изменится, а суммарный вектор $\vec{p}$ перейдёт в вектор $\overrightarrow{p_1}$. Если $\vec{p} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{p} \neq \overrightarrow{p_1}$, т.к. они неколлинеарны. Единственный вариант, когда $\vec{p} = \overrightarrow{p_1}$, это $\vec{p} = \vec{0}$.

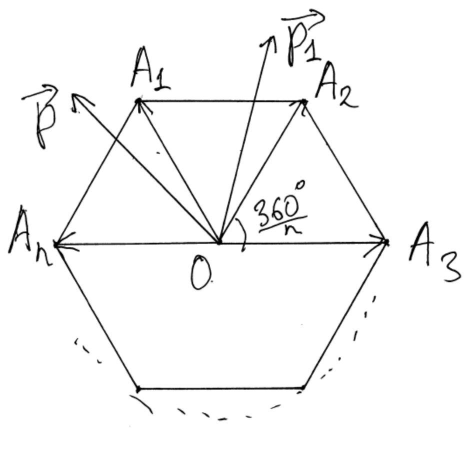

рис. 4.2

Ответ: $\vec{0}$.

Баллы	**Условия выставления**
15	Обоснованно получен верный ответ
10	Всё выполнено верно, но в ответе записан 0, а не $\vec{0}$.

5	**Векторно:** указано, что ответом будет $\vec{0}$, сделана попытка построить сумму векторов, но автору решения на удалось доказать, что сумма векторов = $\vec{0}$; **Через повороты:** получен верный ответ $\vec{0}$, показано, что при повороте фигуры на угол $\frac{360°}{n}$ (или на кратный ему угол) сумма векторов не изменится, но не обоснованно утверждение, что сумма векторов = $\vec{0}$.
0	Все остальные случаи.

№5: При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases}(x+3)^2-(y+2)^2=0\\(x-3)^2+(y-6)^2=a\end{cases}$ имеет нечётное число различных решений?

Ответ: {2; 98; 100}

Решение: преобразуем первое уравнение: $(x+3)^2-(y+2)^2=(x+3-y-2)\cdot(x+3+y+2)=(x-y+1)\cdot(x+y+5)=0$.

Получилось объединение двух прямых: $y=x+1$ и $y=-x-5$ (рис. 5.2).

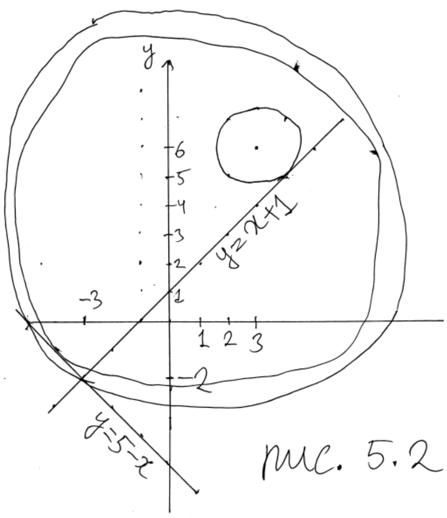

рис. 5.2

Рассмотрим второе уравнение: при $a<0$ получается пустое множество, при $a=0$ получается одна точка O(3; 6). При $a>0$ получается семейство окружностей с центром в точке O(3; 6) и радиусом $\sqrt{a}$ $(r^2=a)$. Нечётное число решений может быть в одном из трёх случаев: 1) окружность касается прямой $y=x+1$ (это будет при $a=2$ $(r=\sqrt{2})$), при этом значении a система имеет одно решение; 2) окружность касается прямой $y=-x-5$ (это будет при $a=98$ $(r=7\sqrt{2})$), при этом значении a система имеет 3 различных решения (две точки пересечения с прямой $y=x+1$ и одну точку пересечения с прямой $y=-x-5$; 3) окружность проходит через точку C $(-3;\ -2)$ пересечения прямых $y=-x-5$ и $y=x+1$ (это будет при $a=100$ $(r=10)$), при этом значении a система имеет 3 различных решения (точка C и ещё по одной точке пересечения окружности с каждой из прямых). Ключевые положения окружностей изображены на рис. 5.2. Значения $a=2$ $(r=\sqrt{2})$, $a=98$ $(r=7\sqrt{2})$ и $a=100$ $(r=10)$ можно найти различными как геометрическими, так и алгебраическими способами, которые хорошо известны преподавателям.

Ответ: {2; 98; 100}

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен верный ответ.
10	Обоснованно получены любые два из трёх значений.
5	Указано, что первое уравнение задаёт две пересекающиеся прямые (и эти прямые построены), а второе уравнение задаёт окружности с радиусом $\sqrt{a}$ $(r^2 = a)$.
0	Остальные случаи.

№6: В угол BCA вписана окружность радиуса 1 с центром в точке O_1. Синус угла O_1CA равен $\frac{1}{3}$. Вторая окружность касается первой окружности и сторон угла. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и одной из сторон угла.

Ответ: $6 - 4\sqrt{2}$ или $3 - 2\sqrt{2}$.

Решение: 1) как известно, центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла. Пусть C – вершина угла, O_1 – центр первой окружности.

Ситуация один: центр второй окружности O_2 лежит за пределами отрезка CO_1 (см. рис. 6.1). Пусть F – точка касания первой окружности (с центром O_1) с одной из сторон угла, а G – точка касания второй окружности (с центром O_2) с той же стороной угла, P – точка касания этих окружностей. По условию $\sin < O_1CF = \sin < O_2CG = \frac{1}{3}$. Тогда из прямоугольного треугольника O_1CF $CO_1 = 3 \cdot O_1F = 3$, а CP=4. Пусть радиус окружности с центром O_2 равен R. Тогда $CO_2 = 4 + R$,

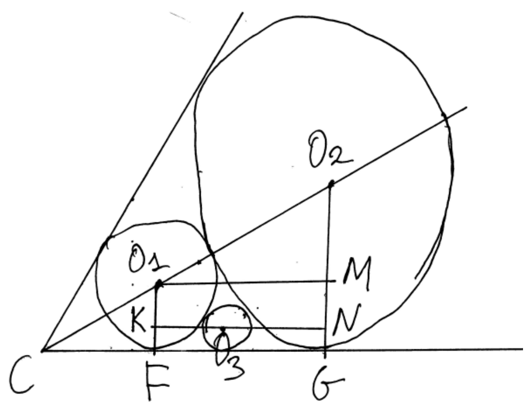

рис. 6.1

$O_2G = R$. Из прямоугольного треугольника O_2CG получаем: $CO_2 = 3 \cdot O_2G$, т.е. $4+R = 3 \cdot R$, откуда R=2. Найдём отрезок FG. Для этого проведём через центр первой окружности O_1 перпендикуляр O_1M на радиус O_2G. Тогда в прямоугольном треугольнике O_1MO_2 $O_1O_2 = O_1P + PO_2 = 1 + 2 = 3$, $O_2M = O_2G - MG = 2 - 1 = 1$. Тогда по теореме Пифагора $O_1M = \sqrt{{O_1O_1}^2 - O_2M^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} = FG$. Теперь через центр искомой третьей окружности O_3 проведём прямую, параллельную прямой FG. Пусть эта прямая пересекает радиус O_1F в точке K, а радиус O_2G в точке N. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1KO_3. Обозначим радиус искомой окружности r. Тогда $O_1O_3 = r + 1$, $O_1K = 1 - r$. По теореме Пифагора $KO_3 =$

$\sqrt{O_1O_3{}^2 - O_1K^2} = \sqrt{(r+1)^2 - (1-r)^2} = 2\sqrt{r}$. А теперь из прямоугольного треугольника O_3NO_2 имеем: $O_3O_2 = r+2$, $O_2N = O_2G - NG = 2 - r$. По теореме Пифагора $O_3N = \sqrt{O_3O_2{}^2 - O_3N^2} = \sqrt{(r+2)^2 - (2-r)^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{r}$. Т.к. $FG = KN = KO_3 + O_3N$, то $2\sqrt{2} = 2\sqrt{r} + 2\sqrt{2}\sqrt{r}$, откуда $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ и $r = \frac{2}{(1+\sqrt{2})^2}$.

Ответ ситуации 1: $\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{3}{4+2\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$ (для удобства проверяющих записал возможные записи правильного ответа).

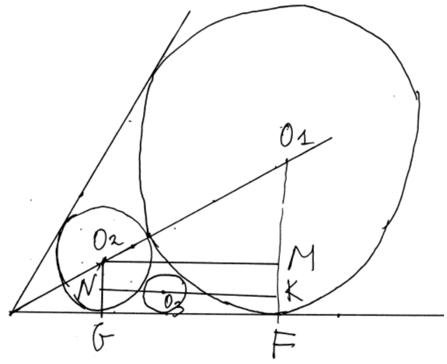

рис. 6.2

Ситуация два: центр второй окружности O_2 лежит на отрезке CO_1 (см. рис. 6.2). В этом случае получится картинка, подобная той, что была в ситуации один (рис. 6.1), но теперь большей будет первая окружность (с центром O_1). Коэффициент подобия картинок равен $\frac{1}{2}$, поэтому легко рассчитать все элементы чертежа, включая ответ. Так, $R = \frac{1}{2}$; $FG = \sqrt{2} = O_1M$; $r = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$.

Ответ ситуации два: $\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\mathbf{6 - 4\sqrt{2}}$ или $\mathbf{3 - 2\sqrt{2}}$.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получены верные ответы в обеих ситуациях.
10	Обоснованно получен верный ответ только в одной из двух ситуаций.
5	Сделаны существенные продвижения в решении задачи, например, хотя бы в одной из ситуаций верно найден радиус второй окружности и отрезок FG (или равный ему отрезок), но не найден ни один верный ответ ни в одной из ситуаций.
0	Остальные случаи.

№7: В учебном центре учатся только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. В учебном центре четыре кружка: математики, физики, информатики и химии. Каждый слушатель учебного центра посещает ровно один кружок. На вопрос «Вы посещаете кружок математики?» ответили «да» 290 человек; на вопрос «Вы посещаете кружок физики?» сказали «да» 250 человек; на вопрос «Вы посещаете кружок информатики?» ответили «да» 260 человек, а на вопрос «Вы посещаете кружок химии?» сказали «да» 310 человек. Перед новым годом среди посетителей кружков информатики и химии провели маскарад: лжецы переоделись рыцарями и стали говорить только правду, а рыцари переоделись лжецами и стали лгать. Среди посетителей кружков математики и физики маскарад не проводился. В результате на вопрос «Вы посещаете кружок математики?» в этот день ответили «да» 310 человек.

а) Сколько лжецов посещают учебный центр?
б) Сколько всего учащихся посещают учебный центр?

Ответ: а) 275 лжецов, б) 560 учащихся.

Решение: пусть $r_М$, $r_Ф$, $r_И$ и $r_Х$ – число рыцарей, посещающих кружки математики, физики, информатики и химии соответственно, $l_М$, $l_Ф$, $l_И$ и $l_Х$ – аналогично для лжецов.

Составим систему уравнений:

$r_М+l_Ф+l_И+l_Х=290$ (1)

$l_М + r_Ф+l_И + l_Х=250$ (2)

$l_М + l_Ф+r_И + l_Х=260$ (3)

$l_М + l_Ф+l_И + r_Х=310$ (4)

$r_М + l_Ф+r_И + r_Х=310$ (5)

Например, «да» на вопрос «Вы посещаете кружок физики?» ответят рыцари-физики, лжецы-математики, лжецы-информатики и лжецы-химики (уравнение (2)).

(1)-(2): $(r_М - l_М) - (r_Ф - l_Ф) = 40$ (а)

(1)-(3): $(r_М - l_М) - (r_И - l_И) = 30$ (б)

(1)-(4): $(r_М - l_М) - (r_Х - l_Х) = -20$ (в)

(5)-(1): $(r_И - l_И) + (r_Х - l_Х) = 20$ (г)

Из (б) и (в) выражаем $(r_И - l_И)$ и $(r_Х - l_Х)$, подставляем в (г), получаем

$(r_М - l_М) - 30 + (r_М - l_М) + 20 = 20$, откуда $(r_М - l_М) = 15$, а $l_М - r_М = -15$

Прибавим к уравнению (1) $l_М - r_М$, получим $r_М+l_Ф+l_И+l_Х+l_М - r_М=290-15$.

$l_Ф+l_И+l_Х+l_М=275$.

Ответ а) 275 лжецов.

Из уравнения (а) $(r_Ф - l_Ф) = (r_М - l_М) - 40 = 15 - 40 = -25$.

Прибавим к уравнению (5) $(r_Ф - l_Ф)$, получим $r_М + l_Ф + r_И + r_Х + (r_Ф - l_Ф) = 310 - 25$, $r_М + r_И + r_Х + r_ф$=285 – число рыцарей в учебном центре.

Всего учащихся: 275+285=560 человек.

Ответ б) 560 человек.

Ответ: а) 275 лжецов, б) 560 человек.

Баллы	**Условия выставления**
20	Обоснованно получены верные ответы на оба вопроса задачи.
15	Обоснованно получен верный ответ на один из двух вопросов задачи.
10	Верно составлена система уравнений и найдена хотя бы одна разность между числом лжецов и числом рыцарей (или наоборот).
5	Верно составлена система уравнений.
0	Все остальные случаи.