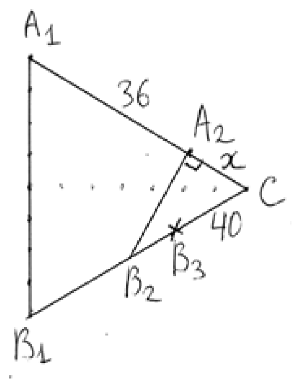
Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2015 г.

Решение задач заочного тура 9 класс.

№1: (15 баллов) Катер и корабль движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В начальный момент времени катер, корабль и порт образуют равносторонний треугольник. Когда катер проплыл 36 км, корабль, катер и порт стали образовывать прямоугольный треугольник, а когда катер прибыл в порт, кораблю оставалось до порта 40 км. Определите расстояние между кораблём и катером в начальный момент времени.



Решение: обозначим (см. рис. 1) положение порта буквой С, первоначальное положение катера - A_1, первоначальное положение корабля - B_1, положение катера, когда он проплыл 36 км - A_2, положение корабля в этот момент - B_2, положение корабля в момент прибытия катера в порт - B_3. Исходя из формулы S=vt, делаем вывод, что отношение перемещений катера и корабля за одинаковое время равно отношению их скоростей, т.е. $A_1A_2 : B_1B_2 = v_{\text{катера}} : v_{\text{корабля}} = A_1C : B_1B_3$ (1). Пусть $A_2C = x$. Т.к. по условию треугольник B_2A_2C – прямоугольный с углом $C = 60°$, то $B_2C = \frac{A_2C}{\cos 60°} = 2x$, $A_1B_1 = B_1C = A_1C = x + 36$; $B_1B_2 = B_1C - B_2C = x + 36 - 2x = 36 - x$; $B_1B_3 = B_1C - B_3C = x + 36 - 40 = x - 4$. Тогда уравнение (1) запишется следующим образом: $\frac{36}{36-x} = \frac{x+36}{x-4}$, из которого получается квадратное уравнение $x^2 + 36x - 1440 = 0$, единственным положительным корнем которого является $x = 24$. Откуда $A_1B_1 = 60$.

Ответ: 60 км.

Критерии проверки: 15 баллов – обосновано получен правильный ответ;

10 баллов – верно составлено уравнение (или система уравнений, если вводились несколько переменных, но была допущена небольшая арифметическая ошибка в конце решения, или верно найдено значение переменной (переменных), но дан ответ не на вопрос задачи;

5 баллов – верно составлено уравнение (система уравнений), но дальнейших успехов не было;

0 баллов – все остальные случаи.

№2: (15 баллов) Изобразите на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих системе неравенств: $\begin{cases} x^2+y^2+30 \le 10x+6y \\ (y+2-x)\cdot(y+x-8) \ge 0 \end{cases}$. Обоснуйте построение.

Решение: система преобразуется следующим образом: $\begin{cases} (x-5)^2+(y+3)^2 \le 4 \\ (y-(x-2))\cdot(y-(8-x)) \ge 0 \end{cases}$.

Первое неравенство системы представляет собой круг с центром в точке (5; 3), второе неравенство представляет верхний и нижний углы, ограниченные прямыми $y=x-2$ и $y=8-x$.

Ответ: см. рис. №2.

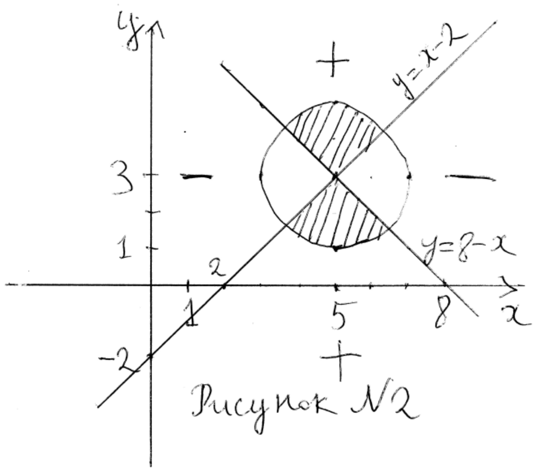


Рисунок N2

Критерии проверки: 15 баллов – верное обоснованное построение;

10 баллов – в целом верно построены графики, но есть ошибки в отдельных точках или линиях (границах) либо знаки второго неравенства расставлены без обоснования, либо общий вид картинки верный, но не указаны на картинке координаты центра круга или не подписаны границы множества (прямые и окружность);

5 баллов – правильно построено (описано) одно из двух множеств системы, либо первое неравенство приведено к каноническому виду $(x-5)^2+(y+3)^2 \le 4$ (или 2^2);

0 баллов – все остальные случаи.

№3: (15 баллов) Функция $y=f(x)$ – чётная, её областью определения является множество действительных чисел. Известно, что уравнение $5f(x)-4=0$ имеет 2015 различных корней. Найдите $f(0)$. Ответ обоснуйте.

Решение: по определению, функция $y=f(x)$ называется чётной, если 1) для любого $x \in D(f(x))$ следует, что $-x \in D(f(x))$ и

2) $f(-x) = f(x)$.

Из определения следует, что если для любого неравного нулю числа x выполняется условие $5f(x) - 4 = 0$, т.е. x является корнем уравнения, то и $5f(-x) - 4 = 0$, т.е. $-x$ также является корнем уравнения, причём $x \neq -x$. Следовательно, различных неравных нулю корней уравнения может быть только чётное число.

Но, по условию задачи, число корней уравнения равно 2015 (нечётное число). Следовательно одним из корней уравнения является 0. Но тогда $5 \cdot f(0) - 4 = 0$, откуда $f(0) = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$ (или 0,8).

Критерии проверки: 15 баллов – обоснованно получен правильный ответ;

5 баллов – доказано, что число неравных нулю корней уравнения – чётное, но затем не сделан правильный вывод, либо получен правильный ответ, но он недостаточно обоснован;

0 баллов – все остальные случаи.

№4: (15 баллов) На кружок по математике ходят только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы – только ложь. Все участники кружка родились в разные дни и в течение учебного года решили разное количество задач. В конце учебного года каждый участник кружка сделал два заявления: а) на кружке не найдётся и 20-ти человек, которые были бы старше меня; б) больше меня задач решили, по крайней мере, 15 человек. Сколько человек посещали кружок в течение года? Ответ обоснуйте.

Решение: а) 1) Возьмём старшего по возрасту лжеца. Он говорит, что не найдётся и 20-ти человек, которые его старше, но он лжёт. Следовательно, найдётся, по крайней мере, 20 человек старше его, и, поскольку он самый старший из лжецов, все эти 20 человек – рыцари. Следовательно, рыцарей не менее 20-ти человек.

2) А теперь рассмотрим самого молодого рыцаря. Он говорит, что не найдётся и 20-ти человек, которые его старше, и он говорит правду. Следовательно, старше него может быть максимум 19 человек. Плюс он сам –рыцарь. Следовательно, рыцарей не может быть более 20-ти человек.

Из пунктов 1) и 2) следует, что рыцарей ровно 20 человек.

б) 3) Среди рыцарей возьмём того, который решил больше всего задач. Он сказал, что, по крайней мере, 15 человек решили задач больше, чем он. Так как он – рыцарь, то это правда. Причём все 15 человек – лжецы. Следовательно, лжецов не менее 15-ти человек.

4) Среди лжецов возьмём того, который решил меньше всего задач. Он сказал, что, по крайней мере, 15 человек решили задач больше, чем он, но он лжёт, следовательно, больше него задач решили не более 14-ти человек. Плюс он сам – лжец. Следовательно, лжецов не может быть больше 15-ти человек.

Из пунктов 3) и 4) следует, что лжецов – ровно 15 человек.

Вывод: на кружок ходили 20 рыцарей и 15 лжецов, всего 35 человек.

Ответ: 35 человек.

Критерии проверки: 15 баллов – обоснованно получен правильный ответ;

10 баллов – верно и обоснованно определено число рыцарей, либо число лжецов;

5 баллов – верно и обоснованно выполнен один из пунктов 1); 2); 3) или 4). Например, доказано, что число лжецов не больше 15-ти человек.

0 баллов – все остальные случаи.

№5: (20 баллов) При каких значениях параметра p уравнение $(p-2)\cdot(x^2-6x+9)-2(p+1)\cdot|x-3|+p+2=0$ имеет ровно два различных решения?

Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(p-2)\cdot(x-3)^2-2(p+1)\cdot|x-3|+p+2=0$, а затем – к $(p-2)\cdot|x-3|^2-2(p+1)\cdot|x-3|+p+2=0$

Сделаем замену: $t=|x-3|$, получим уравнение $(p-2)\cdot t^2-2(p+1)\cdot t+p+2=0$. Изучим, сколько корней уравнения (по x) даёт каждое значение t, исходя из графика функции $t=|x-3|$ (см. рисунок №3).

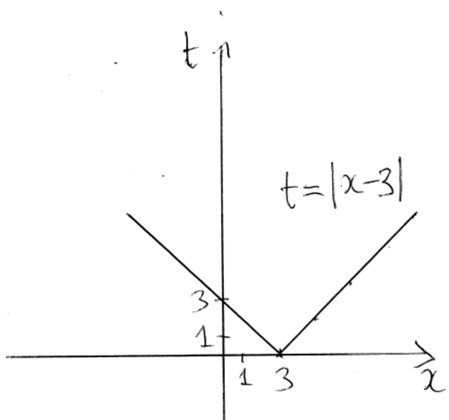


Рисунок №3

Из графика видно, что значения *t* меньшие нуля не дают корней уравнения по x, *t=0* даёт одно значение x *(x=0)*, а $t>0$ даёт два корня по x. Поэтому, чтобы уравнение $(p-2)\cdot|x-3|^2-2(p+1)\cdot|x-3|+p+2=0$ имело два различных корня, необходимо, чтобы уравнение $(p-2)\cdot t^2-2(p+1)\cdot t+p+2=0$ либо имело один корень, и он должен быть больше нуля, либо имело два различных корня разных знаков.

Сначала рассмотрим линейный случай (*p-2=0*, т.е.

p=2). $0 \cdot t^2 - 6t + 4 = 0$, откуда $t = \frac{2}{3}$. Следовательно, p=2 входит в ответ.

Теперь пусть $p \neq 2$. Тогда либо уравнение имеет один корень и он положителен, т.е. $\begin{cases} \frac{D}{4} = 0 \\ t_в > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (p+1)^2 - (p-2) \cdot (p+2) = 0 \\ \frac{p+1}{p-2} > 0 \end{cases}$ $p = -2{,}5$.

И, наконец, уравнение имеет два корня разных знаков, если $t_1 t_2 < 0$. По теореме Виета $t_1 t_2 = \frac{p+2}{p-2} < 0$ (это условие гарантирует, что $D > 0$ и, следовательно, уравнение имеет два различных корня. $p \in (-2; 2)$.

Окончательный ответ: $p \in \{-2{,}5\} \cup (-2; 2]$.

Ответ: $\{-2{,}5\} \cup (-2; 2]$.

Критерии проверки: 20 баллов – обоснованно получен правильный ответ;

15 баллов – $(x^2 - 6x + 9)$ превращено в $|x - 3|$, сделана замена $t = |x - 3|$, изучено, сколько корней по x дают различные значения t, описаны ситуации по t, соответствующие нужным ситуациям по x, но при решении одно из них допущена арифметическая ошибка, либо задача решена в целом верно, но не был рассмотрен линейный случай;

10 баллов – $(x^2 - 6x + 9)$ превращено в $|x - 3|$, сделана замена $t = |x - 3|$, изучено, сколько корней по x дают различные значения *t*, описаны ситуации по t, соответствующие нужным ситуациям по x;

5 баллов – $(x^2 - 6x + 9)$ превращено в $|x - 3|$, сделана замена $t = |x - 3|$, изучено, сколько корней по x дают различные значения t

0 баллов – все остальные случаи.

№6: (20 баллов) На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12 см, взяты точки A и B, лежащие по разные стороны от точки O так, что OA=15 см, OB=13 см. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите площадь треугольника ABC, если C – точка пересечения этих касательных.

Решение: (см. рисунок №4):

1) в треугольнике OKA: OK=12, AO=15, $< AKO = 90°$ как угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания. Из прямоугольного треугольника AKO $\sin < KAO = \sin < CAB = \frac{KO}{AO} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$;

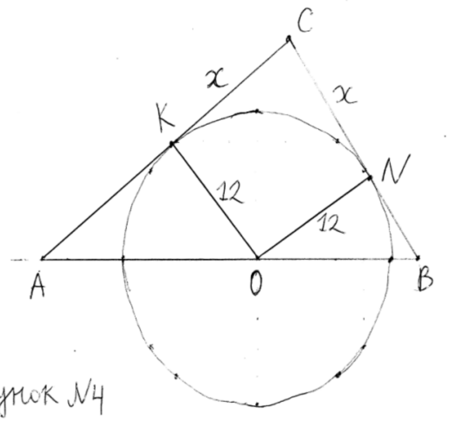


Рисунок №4

$AK = \sqrt{AO^2 - KO^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$

2) Аналогично, из прямоугольного треугольника ONB $\sin < NBO = \sin < CBA = \frac{ON}{OB} = \frac{12}{13}$;

$NB = \sqrt{OB^2 - ON^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$

3) CK и CN – две касательные из точки C к одной окружности, следовательно, CK=CN. Пусть *CK=CN=x*. Тогда *AC=9+x, BC=5+x*.

4) К треугольнику ACB применим теорему синусов: $\frac{AC}{\sin<B} = \frac{BC}{\sin<A}$; $\frac{5+X}{\frac{4}{5}} = \frac{9+X}{\frac{12}{13}}$.

Из этого уравнения, x=21. AC=AK+KC=9+x=9+21=30.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin < A = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 30 \cdot \frac{4}{5} = 336.$

Ответ: 336.

Критерии проверки: 20 баллов – обоснованно получен правильный ответ;

15 баллов – допущена арифметическая ошибка в конце решения задачи, либо какие-то действия недостаточно обоснованы (например, не указано, что радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, либо не указано, что две касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны).

10 баллов – найдены все стороны треугольника ABC и синусы углов A и B.

5 баллов – найдены либо $\sin < A$ и $\sin < B$, либо AK и BN, либо CK и CN.

0 баллов – все остальные случаи.