

**Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников
«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету**

Решение заданий для 8 класса

Вариант № 1

1. Заметим, что $23x + 25y = 29(x + y) - 2(3x + 2y)$. Каждое слагаемое делится на 29, поэтому и сумма тоже.

2. За длину окружности пруда возьмем 1, скорости бегунов x и y . Получим систему:

$$10x - 10y = 2,5, \text{ откуда } x - y = 0,25. \text{ Искомое время } t = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ мин.}$$

3. Из уравнения $15 + \frac{15(v_k - v_t)}{v_k + v_t} + \frac{250}{v_k + v_t} = \frac{250}{v_t}$ найдем $v_t = \frac{25}{3} \frac{\text{м}}{\text{мин}} = \frac{1}{2} \frac{\text{км}}{\text{час}}$

4. Из подобия треугольников $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$. Обозначим $S_{BOM} = S$. Тогда $S_{AOM} = 2S$; $S_{AOD} = 4S$;

$$S_{BDC} = 6S; S_{DOMC} = 5S. \text{ Отсюда } S_{DOMC} : S_{ABCD} = 5 : 12$$

По свойству биссектрисы $\frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{1}{2}$. По теореме Менелая $\frac{OD_1}{B_1O} = \frac{1}{3}$. Обозначим $S_{A_1OD_1} = S$. Тогда

$$S_{A_1OB_1} = 3S; S_{M_1OB_1} = 3S; S_{M_1A_1C_1} = 6S; S_{M_1D_1C_1O} = 5S.$$

$$\text{Отсюда } S_{M_1D_1C_1O} : S_{B_1A_1C_1} = 5 : 12$$

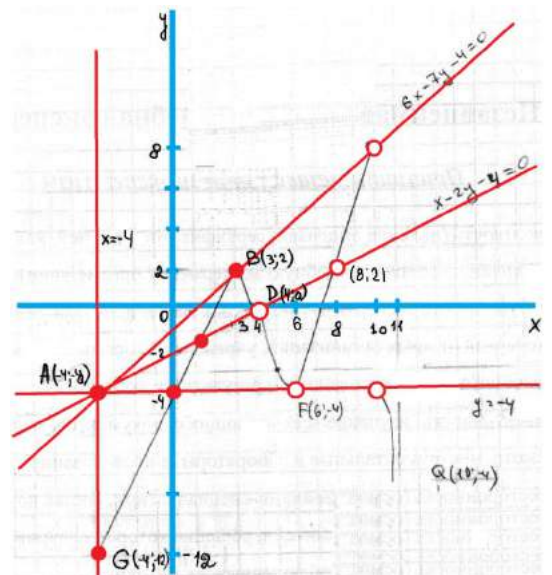
Ответ: 1:1

$$5. D_f = [-4; 4) \cup (4; 6) \cup (6; 10) \cup (10; 11)$$

$$E_f = [-\infty; 8)$$

$$\text{Прямые: } 6x - 7y - 4 = 0; x - 2y - 4 = 0; y = -4$$

Решение задачи 6 далее



Вариант № 2

1. Заметим, что $37x + 30y = 51(x + y) - 7(2x + 3y)$. Каждое слагаемое делится на 31, поэтому и сумма тоже.

2. Из условия $\frac{3}{4}S = \frac{2}{3}tv$. Поэтому отношение $\frac{S}{t} = \frac{8}{9}v$.

$v' = \frac{\frac{S}{t}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}v$ Ответ: в полтора раза

3. Из уравнения $12 + \frac{12(v_k - v_t)}{v_k + v_t} + \frac{200}{v_k + v_t} = \frac{200}{v_t}$ найдем $v_t = \frac{25 \text{ м}}{3 \text{ мин}} = \frac{1 \text{ км}}{2 \text{ час}}$

4. Из подобия треугольников $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$. Обозначим $S_{BOM} = S$. Тогда $S_{AOM} = 2S$; $S_{AOD} = 4S$;

$S_{BDC} = 6S$; $S_{DOMC} = 5S$. Отсюда $S_{DOMC} : S_{ABCD} = 5 : 12$

Из подобия треугольников $\frac{D_1O_1}{O_1B_1} = \frac{3}{1}$; $A_1O_1 = O_1M_1$. Обозначим $S_{B_1O_1M_1} = S$.

Тогда $S_{B_1O_1A_1} = S$; $S_{D_1O_1A_1} = 3S$; $S_{B_1D_1C_1} = 8S$; $S_{D_1O_1M_1C_1} = 5S$

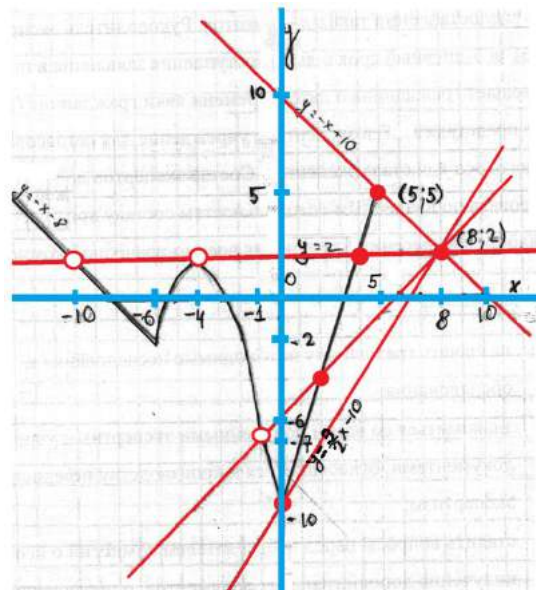
Ответ: 1:1

5. $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 5]$

$E_f = [-10; +\infty)$

Прямые: $-x - y + 10 = 0$; $x - y - 6 = 0$;

$$y = 2; y = \frac{3}{2}x - 10$$



Задача 6.

Решение:

1. $S_{\Delta AEB} = S_{\Delta ABC}$ (по условию)

AB – общее основание \Rightarrow т. С и т. Е находятся на одинаковом расстоянии от прямой AB $\Rightarrow AB \parallel EC$

2. Аналогично доказываем, что каждая диагональ такого пятиугольника параллельна его противоположной стороне.

3.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel OC \\ AO \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCO - \text{параллелограмм с диагональю } AC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC}$$

4. Введем обозначения:

- $AC = a_1$;
- h_1 – высота ΔACO , проведенная из т.О к стороне AC;
- $ED = a_2$;
- h_2 – высота ΔECD , проведенная из т.С к стороне ED.

5.

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel ED \Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta EDO \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2 - h_1} \\ S_{\Delta AOC} = S_{\Delta ECD} \Rightarrow \frac{h_1 a_1}{2} = \frac{h_2 a_2}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_2}{h_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} - 1$$

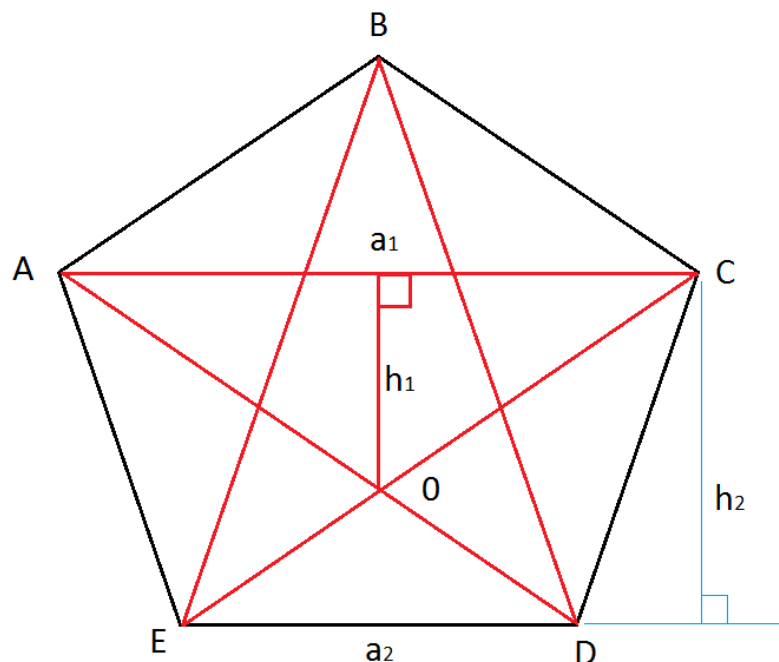
6. Обозначим $\frac{h_1}{h_2} = t$ и найдем $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ из квадратного уравнения: $t^2 + t - 1 = 0$.

7. $S_{\Delta EOD} = \frac{1}{2} a_2 (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} a_2 h_2 (1 - \frac{h_1}{h_2}) = S_0 (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$

8. $S_{ABCDE} = 4S_0 - S_{\Delta EOD} = S_0 (4 - 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}) = S_0 (\frac{5+\sqrt{5}}{2})$

Ответы: 1 вариант ($\frac{5+\sqrt{5}}{7}$)

2 вариант ($\frac{5+\sqrt{5}}{3}$)



Критерии проверки заданий

1. и 2. – 10 баллов за решенную задачу, 0 – если не решена.

3. Правильно составлено уравнение или система – 5 баллов

Допущена арифметическая ошибка или скорость указана в м/ мин – 10 баллов

Верно решена – 15 баллов

4. Есть правильное начало решения – 5 баллов

Найдена площадь одного четырехугольника – 10 баллов

Найдены площади двух четырехугольников, но не найдено отношение площадей – 15

Верно решена задача – 20

5. Найдено ОДЗ – 5 баллов

Построены графики и найдено ОДЗ - 15 баллов

Найдена одна прямая - 20 баллов

Верное решение – 25 баллов

6. Доказано, что четырехугольники – трапеции – 10 баллов

Найдены подобные треугольники, но не решены квадратные уравнения – 15

Верное решение – 20 баллов