Второй (заключительный) этап XIX олимпиады школьников

«Шаг в будущее» для 8-10 классов по образовательному предмету

Решение заданий для 10 класса. Вариант 1. Вариант 2.

Задание 1 (1 вариант).

Сравните числа $\left(\frac{2016}{2017}\right)^4$ и $\left(\frac{2015}{2016}\right)^5$.

Решение:

$$\frac{2016}{2017}=1-\frac{1}{2017},\ \frac{2015}{2016}=1-\frac{1}{2016}$$

$$\frac{1}{2017}<\frac{1}{2016}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2017}>1-\frac{1}{2016}\Leftrightarrow 1>\frac{2016}{2017}>\frac{2015}{2016}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2016}{2017}\right)^4>\left(\frac{2015}{2016}\right)^4>\left(\frac{2015}{2016}\right)^5\Leftrightarrow\left(\frac{2016}{2017}\right)^4>\left(\frac{2015}{2016}\right)^5.$$

Ответ: $\left(\frac{2016}{2017}\right)^4>\left(\frac{2015}{2016}\right)^5$.

Задание 1 (2 вариант).

Сравните числа $\left(\frac{1579}{1580}\right)^7$ и $\left(\frac{1580}{1581}\right)^6$.

Решение:

$$\frac{1579}{1580}=1-\frac{1}{1580},\ \frac{1580}{1581}=1-\frac{1}{1581}$$

$$\frac{1}{1581}<\frac{1}{1580}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{1581}>1-\frac{1}{1580}\Leftrightarrow 1>\frac{1580}{1581}>\frac{1579}{1580}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1580}{1581}\right)^6>\left(\frac{1579}{1580}\right)^6>\left(\frac{1579}{1580}\right)^7\Leftrightarrow\left(\frac{1580}{1581}\right)^6>\left(\frac{1579}{1580}\right)^7.$$

Ответ: $\left(\frac{1579}{1580}\right)^7<\left(\frac{1580}{1581}\right)^6$.

Задание 2 (1 вариант).

Вычислить $\dfrac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, где $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{2016}{1580}}-\sqrt{\dfrac{1580}{2016}}\right)$.

Решение: $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2016}{1580}}-\sqrt{\frac{1580}{2016}}\right)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)>0$,

$$x^2+1=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)+1=\frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Тогда

$$\frac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{1580\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\frac{1580\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{2}{t}}=1580\cdot\frac{t^2+1}{t}\cdot\frac{t}{2}=\frac{1580}{2}(t^2+1)=$$

$$=\frac{1580}{2}\left(\frac{2016}{1580}+1\right)=\frac{1580}{2}\cdot\frac{2016+1580}{1580}=\frac{2016+1580}{2}=1798.$$

Ответ: 1798**.**

Задание 2 (2 вариант).

Вычислить $\frac{1580\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-x}$, где $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2016}{1580}}+\sqrt{\frac{1580}{2016}}\right)$.

Решение: $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2016}{1580}}+\sqrt{\frac{1580}{2016}}\right)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)>0$,

$$x^2-1=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)-1=\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|t-\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

Тогда

$$\frac{1580\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-x}=\frac{1580\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\frac{1580\left(t-\frac{1}{t}\right)}{-\frac{2}{t}}=1580\cdot\frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{-t}{2}=\frac{1580}{2}(1-t^2)=$$

$$=\frac{1580}{2}\left(1-\frac{2016}{1580}\right)=\frac{1580}{2}\cdot\frac{1580-2016}{1580}=\frac{1580-2016}{2}=-218.$$

Ответ: -218.

Задание 3 (1 вариант).

На новогодний кооператив четверо сотрудников привели по одному ребенку. Для них в течении вечера разыгрывали шесть (одинаковых) подарков. Какова вероятность, что ни один ребенок не ушел с праздника без подарка?

Решение:

Вычислим количество вариантов распределения подарков при условии, что каждому ребенку достанется хотя бы один из них. Для этого присвоим подаркам порядковые номера. Поставим между некоторыми этими номерами три точки (не более одной между двумя цифрами). Такое положение точек будет означать, что все подарки с номерами до первой точки достались первому ребенку, до второй точки – второму, до третьей – третьему, а после третьей – четвертому. Очевидно, что количество таких вариантов расположения точек между цифрами равно $C_5^3=10$.

Вычислим теперь общее количество вариантов распределения подарков между детьми. Для этого добавим еще четыре подарка к шести, и раздадим по одному подарку каждому ребенку, а остальные распределим случайным образом. Описанная ситуация равносильна, распределению десяти подарков между четырьмя детьми, при условии, что каждому ребенку достанется хотя бы один из них. Поэтому количество вариантов расположения точек между цифрами равно $C_9^3=84$.

Искомая вероятность вычисляется, как отношение первого числа вариантов ко второму, т.е. $P=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$.

Ответ: $\frac{5}{42}$.

Задание 3 (2 вариант).

Карабас-Барабас, лиса Алиса и кот Базилио нашли пять золотых монет и в течении ночи разыграли каждую из них случайным образом. Какова вероятность, что никто из них не ушел с поля без монет?

Решение:

Вычислим количество вариантов распределения монет при условии, что каждому участнику розыгрыша достанется хотя бы одна из них. Для этого присвоим монетам порядковые номера. Поставим между некоторыми этими номерами две точки (не более одной между двумя цифрами). Такое положение точек будет означать, что все монеты с номерами до первой точки достались Карабасу-Барабасу, до второй точки – лисе Алисе, а после второй – коту Базилио. Очевидно, что количество таких вариантов расположения точек между цифрами равно $C_4^2 = 6$.

Вычислим теперь общее количество вариантов распределения монет между участниками. Для этого добавим еще три монеты к пяти, и раздадим по одной монете каждому участнику, а остальные распределим случайным образом. Описанная ситуация равносильна, распределению восьми монет между тремя участниками, при условии, что каждому участнику розыгрыша монет достанется хотя бы одна из них. Поэтому количество вариантов расположения точек между цифрами равно $C_7^2 = 21$.

Искомая вероятность вычисляется, как отношение первого числа вариантов ко второму, т.е. $P = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

Задание 4 (1 вариант).

Решить уравнение: $\sqrt[4]{79 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}}} - \sqrt[4]{85 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}} = 0$

Решение: $\sqrt[4]{79 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}}} - \sqrt[4]{85 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}} = 0 \iff$

$\iff \sqrt[4]{79 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}}} = \sqrt[4]{85 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}} \iff$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 79+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} = 85-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}} \\ 79+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{24+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{30-\sqrt{x}} = 6 \\ x \ge 0 \end{cases} \quad (*)$$

Возведем уравнение в куб:

$$24+\sqrt{x}+30-\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}\right)=216$$ и

подставив вместо $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}$ число 6, получим:

$54+18\cdot\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}=216$, преобразовываем

$\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}=9$, возводим еще раз в куб:

$$\left(24+\sqrt{x}\right)\cdot\left(30-\sqrt{x}\right)=729$$

$$x-6\sqrt{x}+9=0$$

$$\left(\sqrt{x}-3\right)^2=0$$

$$x=9$$

Сделаем проверку, подставим $x=9$ в систему $(*)$, получаем верное равенство.

Ответ: 9.

Задание 4 (2 вариант).

Решить уравнение: $\sqrt[6]{77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}}-\sqrt[6]{83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}}=0$

Решение: $\sqrt[6]{77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}}-\sqrt[6]{83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}}=0$

$$\sqrt[6]{77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}}-\sqrt[6]{83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}}=\sqrt[6]{83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}} = 83-\sqrt[3]{31-\sqrt{x}} \\ 77+\sqrt[3]{23+\sqrt{x}} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{23+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{31-\sqrt{x}} = 6 \\ x \ge 0 \end{cases} \quad (*)$$

Возведем уравнение в куб:

$$23+\sqrt{x}+31-\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}\right)=216$$ и

подставив вместо $\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}$ число 6, получим:

$54+18\cdot\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}=216$, преобразовываем

$\sqrt[3]{23+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{31-\sqrt{x}}=9$, возводим еще раз в куб:

$$\left(23+\sqrt{x}\right)\cdot\left(31-\sqrt{x}\right)=729$$

$$x-8\sqrt{x}+16=0$$

$$\left(\sqrt{x}-4\right)^2=0$$

$$x=16$$

Сделаем проверку, подставим $x=16$ в систему $(*)$, получаем верное равенство.

Ответ: 16.

Задание 5 (1 вариант).

Найти при каких a уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x+\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x+3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x+7\sin x+12}=a$$

не имеет решений?

Решение:

$$\frac{1}{\sin^2 x+\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x+3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x+7\sin x+12}=a$$

Сделаем замену $\sin x=t$, $-1\le t\le 1$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t^2+t}+\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{1}{t^2+5t+6}+\frac{1}{t^2+7t+12}=a,$$

$$\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{(t+1)(t+2)}+\frac{1}{(t+2)(t+3)}+\frac{1}{(t+3)(t+4)}=a.$$

Воспользуемся разложением дроби вида $\frac{1}{(t+k)(t+k+1)}$ в виде суммы простейших дробей $\frac{1}{(t+k)(t+k+1)}=\frac{1}{t+k}-\frac{1}{t+k+1}$, тогда получим

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+3}+\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t+4}=a.$$

Сокращаем дроби с учетом допустимых значений

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+4}=a,\ t\in(-1;0)\cup(0,1]$$

$$\frac{4}{t(t+4)}=a$$

При $a=0$ уравнение не имеет решений, рассмотрим $a\neq 0$, тогда $t(t+4)=\frac{4}{a}$,

$$(t+2)^2=\frac{4}{a}+4.$$

Оценим правую часть уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}-1<t<0\\ 0<t\le 1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<t+2<2\\ 2<t+2\le 3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<(t+2)^2<4\\ 4<(t+2)^2\le 9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<\frac{4}{a}+4<4\\ 4<\frac{4}{a}+4\le 9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-\frac{4}{3}\\ a\ge\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

Следовательно, при $a\in\left[-\frac{4}{3};\frac{4}{5}\right)$ уравнение не имеет решений.

Ответ: $a\in\left[-\frac{4}{3};\frac{4}{5}\right)$.

Задание 5 (2 вариант).

Найти при каких a уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x-3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x-5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x-7\sin x+12}=a$$

не имеет решений?

Решение:

$$\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x-3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x-5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x-7\sin x+12}=a$$

Сделаем замену $\sin x=t$, $-1\le t\le 1$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t^2-t}+\frac{1}{t^2-3t+2}+\frac{1}{t^2-5t+6}+\frac{1}{t^2-7t+12}=a,$$

$$\frac{1}{t(t-1)}+\frac{1}{(t-1)(t-2)}+\frac{1}{(t-2)(t-3)}+\frac{1}{(t-3)(t-4)}=a.$$

Воспользуемся разложением дроби вида $\frac{1}{(t-k)(t-(k+1))}$ в виде суммы простейших дробей $\frac{1}{(t-k)(t-(k+1))}=\frac{1}{t-(k+1)}-\frac{1}{t-k}$, тогда получим

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t-3}=a.$$

Сокращаем дроби с учетом допустимых значений

$$\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t}=a,\ t\in[-1;0)\cup(0,1)$$

$$\frac{4}{t(t-4)}=a$$

При $a=0$ уравнение не имеет решений, рассмотрим $a\neq 0$, тогда $t(t-4)=\frac{4}{a}$,

$$(t-2)^2=\frac{4}{a}+4.$$

Оценим правую часть уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}-1\le t<0\\ 0<t<1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le t-2<-2\\ -2<t-2<-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4<(t-2)^2\le 9\\ 1<(t-2)^2<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4<\frac{4}{a}+4\le 9\\ 1<\frac{4}{a}+4<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge\frac{4}{5}\\ a<-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Следовательно, при $a\in\left[-\frac{4}{3};\frac{4}{5}\right)$ уравнение не имеет решений.

Ответ: $a\in\left[-\frac{4}{3};\frac{4}{5}\right)$.

Задание 6 (1 вариант).

Цена на товар повышалась в последний день каждого месяца на 5, $4\frac{1}{6}$, $2\frac{6}{7}$ или $6\frac{2}{3}$ процентов. Сколько прошло месяцев к тому моменту, когда первоначальная цена товара увеличилась ровно на 50%?

Решение:

Пусть исходная цена товара x.

При повышении цены товара на 5%, она становится равной $x\left(1+\frac{5}{100}\right)=1{,}05x$, если цена на товар повышалась в течении n месяцев, то цена станет равной $x\left(1+\frac{5}{100}\right)^n = x\cdot 1{,}05^n = x\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^n$.

Пусть цена на товар повышалась на 5% в течении n месяцев, на $4\frac{1}{6}$% в течении m месяцев, на $2\frac{6}{7}$% в течении l месяцев, на $6\frac{2}{3}$% в течении p месяцев.

Тогда в результате она стала равной $x\left(1+\frac{5}{100}\right)^n\left(1+\frac{4\frac{1}{6}}{100}\right)^m\left(1+\frac{2\frac{6}{7}}{100}\right)^l\left(1+\frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^p=$

$=x\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^n\left(\frac{25}{24}\right)^m\left(\frac{36}{35}\right)^l\left(\frac{16}{15}\right)^p = x\cdot\left(1+\frac{50}{100}\right)$, значит,

$$\left(\frac{3\cdot 7}{2^2\cdot 5}\right)^n\left(\frac{5^2}{2^3\cdot 3}\right)^m\left(\frac{2^2\cdot 3^2}{5\cdot 7}\right)^l\left(\frac{2^4}{3\cdot 5}\right)^p=\frac{3}{2}$$

$$3^n\cdot 7^n\cdot 2^{-2n}\cdot 5^{-n}\cdot 5^{2m}\cdot 2^{-3m}\cdot 3^{-m}\cdot 2^{2l}\cdot 3^{2l}\cdot 5^{-l}\cdot 7^{-l}\cdot 2^{4p}\cdot 3^{-p}\cdot 5^{-p}=3^1\cdot 2^{-1}$$
$$2^{-2n-3m+2l+4p}\cdot 3^{n-m+2l-p}\cdot 5^{-n+2m-l-p}\cdot 7^{n-l}=3^1\cdot 2^{-1}$$

Согласно основной теореме арифметики каждое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых множителей, и это представление единственное с точностью до порядка их следования. В таком случае:

$$\begin{cases}-2n-3m+2l+4p=-1\\ n-m+2l-p=1\\ -n+2m-l-p=0\\ n-l=0\end{cases},\ \text{решаем систему}\ \begin{cases}n=2\\ m=3\\ l=2\\ p=2\end{cases}.$$

Итак, $n+m+l+p=2+3+2+2=9$, следовательно, цена на товар выросла ровно на 50% за 9 месяцев.

Ответ: 9.

Задание 6 (2 вариант).

Цена на товар повышалась в последний день каждого месяца на 10, $6\frac{2}{3}$, $12{,}5$ или $4\frac{1}{6}$ процентов. Сколько прошло месяцев к тому моменту, когда первоначальная цена товара увеличилась ровно на $83\frac{1}{3}\%$?

Решение:

Пусть исходная цена товара x.

При повышении цены товара на 10%, она становится равной $x\left(1+\frac{10}{100}\right)=1{,}1x$, если цена на товар повышалась в течении n месяцев, то цена станет равной $x\left(1+\frac{10}{100}\right)^n = x\cdot 1{,}1^n = x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^n$.

Пусть цена на товар повышалась на 10% в течении n месяцев, на $6\frac{2}{3}\%$ в течении m месяцев, на $12{,}5\%$ в течении l месяцев, на $4\frac{1}{6}\%$ в течении p месяцев.

Тогда в результате она стала равной $x\left(1+\frac{10}{100}\right)^n\left(1+\frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^m\left(1+\frac{12{,}5}{100}\right)^l\left(1+\frac{4\frac{1}{6}}{100}\right)^p =$

$= x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^n\left(\frac{16}{15}\right)^m\left(\frac{9}{8}\right)^l\left(\frac{25}{24}\right)^p = x\cdot\left(1+\frac{83\frac{1}{3}}{100}\right)$, значит,

$$\left(\frac{11}{2\cdot 5}\right)^n\left(\frac{2^4}{3\cdot 5}\right)^m\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^l\left(\frac{5^2}{2^3\cdot 3}\right)^p=\frac{11}{6}$$

$$11^n\cdot 2^{-n}\cdot 5^{-n}\cdot 2^{4m}\cdot 3^{-m}\cdot 5^{-m}\cdot 3^{2l}\cdot 2^{-3l}\cdot 5^{2p}\cdot 2^{-3p}\cdot 3^{-p}=11\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-`1}$$

$$2^{-n+4m-3l-3p}\cdot 3^{-m+2l-p}\cdot 5^{-n-m+2p}\cdot 11^n = 2^{-1}\cdot 3^{-`1}\cdot 11^1$$

Согласно основной теореме арифметики каждое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых множителей, и это представление единственное с точностью до порядка их следования. В таком случае:

$$\begin{cases} -n+4m-3l-3p=-1 \\ -m+2l-p=-1 \\ -n-m+2p=0 \\ n=1 \end{cases}, \text{ решаем систему } \begin{cases} n=1 \\ m=3 \\ l=2 \\ p=2 \end{cases}.$$

Итак, $n+m+l+p=1+3+2+2=8$, следовательно, цена на товар выросла ровно на $83\frac{1}{3}\%$ за 8 месяцев.

Ответ: 8.

Задание 7 (1 вариант).

Решить неравенство: $\dfrac{2}{\sqrt{x}+x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x^2}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}+1}\geq 3$.

Решение:

Пусть $a=\sqrt{x}+x^2$, $b=1+x^2$, $c=\sqrt{x}+1$, тогда

$$\frac{2}{\sqrt{x}+x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{x}+1}=\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{b+a-c}{c}.$$

Или $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}-3\geq 3$, при любых положительных a,b,c. Здесь используется три раза неравенство Коши: $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{ba}{ab}}=2$.

Поэтому исходное неравенство выполняется для всех допустимых x, т.е. $x\in[0;\infty)$

Ответ: $x\in[0;\infty)$.

Задание 7 (2 вариант).

Решить неравенство: $\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}+x}+\dfrac{2\sqrt[4]{x}}{1+x}+\dfrac{2x}{\sqrt[4]{x}+1}\leq 3$

Решение:

Пусть $a=\sqrt[4]{x}+x$, $b=1+x$, $a=\sqrt[4]{x}+1$, тогда

$$\frac{2}{\sqrt[4]{x}+x}+\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+x}+\frac{2x}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{b+a-c}{c}.$$

Или $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-3\geq 3$, при любых положительных a,b,c. Здесь используется три раза неравенство Коши: $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{ba}{ab}}=2$.

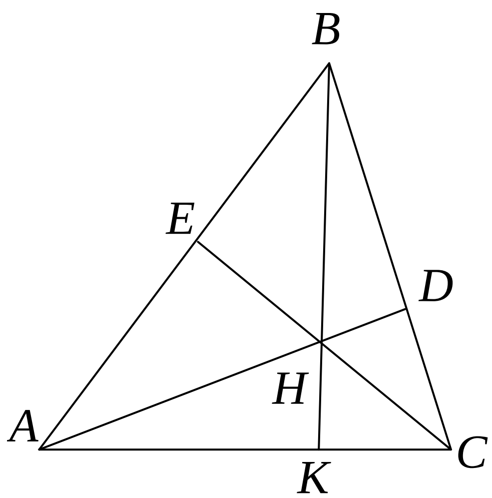
Поэтому исходное неравенство выполняется только при $a=b=c$, т.е. при $x=1$

Ответ: 1.

Задание 8 (1 вариант).

В остроугольном треугольнике ABC угол B = 75^0, длина AC = 2 см, H – точка пересечения его высот. Площадь треугольника AHC = $\sqrt{12}-3$ см^2. Найти площадь треугольника ABC.

Решение:



Рассмотрим треугольник HBC. По теореме синусов: $\frac{BH}{\sin\angle BCH}=\frac{BC}{\sin\angle BHC}$.

Заметим, что $\sin\angle BCH=\sin\left(90^\circ-\angle ABC\right)=\cos\angle ABC$ и $\sin\angle BHC=\sin\left(180^\circ-\angle BAC\right)=\sin\angle BAC$.

Рассмотрим треугольник ABC. По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$.

Поэтому $\dfrac{BH}{\cos\angle ABC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}\Rightarrow BH=AC\cdot ctg\angle ABC$.

Рассмотрим треугольник НАС. $S_{AHC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot HK\Rightarrow HK=\dfrac{2S_{AHC}}{AC}$.

Рассмотрим треугольник АВС.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK=\frac{1}{2}AC\cdot\left(BH+HK\right)=\frac{1}{2}AC\cdot\left(AC\cdot ctg\angle ABC+\frac{2S_{AHC}}{AC}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}AC^2\cdot ctg\angle ABC+S_{AHC}$$

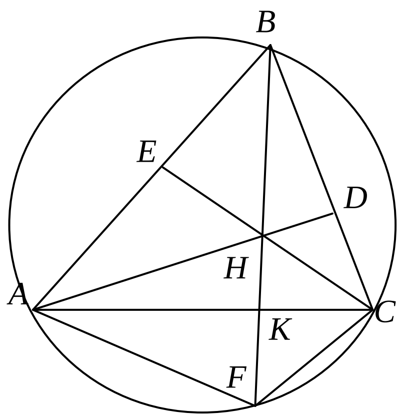
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}2^2\cdot ctg75^\circ+2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3=1.$$

Ответ: 1.

Задание 8 (2 вариант).

В треугольнике AFC $\angle F=105^\circ$, длина $AC=\sqrt{6}$ см, B – точка пересечения его высоты FK с описанной около него окружностью. Площадь треугольника AFC равна $\sqrt{27}-4$ см^2. Найти площадь треугольника ABC.

Решение:



Пусть Н – точка пресечения высот треугольника АВС, тогда треугольник AFC равен треугольнику АНС (так как $\angle EHD=\angle AHC=\angle AFC$).

Рассмотрим треугольник HBC. По теореме синусов: $\dfrac{BH}{\sin\angle BCH}=\dfrac{BC}{\sin\angle BHC}$.

Заметим, что $\sin\angle BCH=\sin\left(90^0-\angle ABC\right)=\cos\angle ABC$ и $\sin\angle BHC=\sin\left(180^0-\angle BAC\right)=\sin\angle BAC$.

Рассмотрим треугольник ABC. По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$.

Поэтому $\dfrac{BH}{\cos\angle ABC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}\Rightarrow BH=AC\cdot ctg\angle ABC$.

Рассмотрим треугольник HAC. $S_{AHC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot HK\Rightarrow HK=\dfrac{2S_{AHC}}{AC}$.

Рассмотрим треугольник ABC.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK=\frac{1}{2}AC\cdot\left(BH+HK\right)=\frac{1}{2}AC\cdot\left(AC\cdot ctg\angle ABC+\frac{2S_{AHC}}{AC}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}AC^2\cdot ctg\angle ABC+S_{AHC}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6}^2\cdot ctg75^0+3\sqrt{3}-4=6-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4=2.$$

Ответ: 2.

Критерии проверки заданий

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	8	8	12	12	12	12	16	20	100

Задача 1.

Баллы	
8	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
6	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
8	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
6	Решение содежит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
4	Верно вычислен один из вариантов.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением/исключением граничных точек.
4	Верно решение задачи, вылолнено разложение дробей в сумму простейших, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или верно составленная система решена с арифметической ошибкой.
4	Верно составлено уравнение.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8.

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	Площадь найдена с арифметической ошибкой, но верно построен рисунок и применены 2 теоремы синусов.
10	Верно построен рисунок и найдена длина НК.
5	Верно построен рисунок и применена теорема синусов.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Решение варианта № 3

1. **Задача:** Сравните числа $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$.

Решение: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{2}{3}\right)^{1580} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1580} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016} < \left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$

2. **Задача:** Вычислить $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}}$, где x - среднее гармоническое чисел

$a=\frac{2016+2015}{2016^2+2016\cdot 2015+2015^2}$ и $b=\frac{2016-2015}{2016^2-2016\cdot 2015+2015^2}$.

Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число c, такое что $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Решение: Вычислим

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2016^2+2016\cdot 2015+2015^2}{2016+2015}+\frac{2016^2-2016\cdot 2015+2015^2}{2016-2015}=$$

$$=\frac{(2016-2015)\left(2016^2+2016\cdot 2015+2015^2\right)+(2016+2015)\left(2016^2-2016\cdot 2015+2015^2\right)}{(2016+2015)(2016-2015)}$$

$$=\frac{2016^3-2015^3+2016^3+2015^3}{(2016+2015)(2016-2015)}=\frac{2\cdot 2016^3}{4031}$$, тогда

$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2016^3}{4031}=\frac{2016^3}{4031}$, следовательно $x=\frac{4031}{2016^3}$

В итоге $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}}=\sqrt[3]{\frac{4031}{(2015+2016)\cdot 2016^3}}=\frac{1}{2016}$

Ответ: $\frac{1}{2016}$.

3. **Задача:** Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислите её площадь $x^2+y^2+4\left(x-|y|\right)\le 0$.

Решение: $x^2+y^2+4\left(x-|y|\right)\le 0$

$x^2+4x+y^2-4|y|\le 0$

$x^2+4x+4+y^2-4|y|+4\le 8$

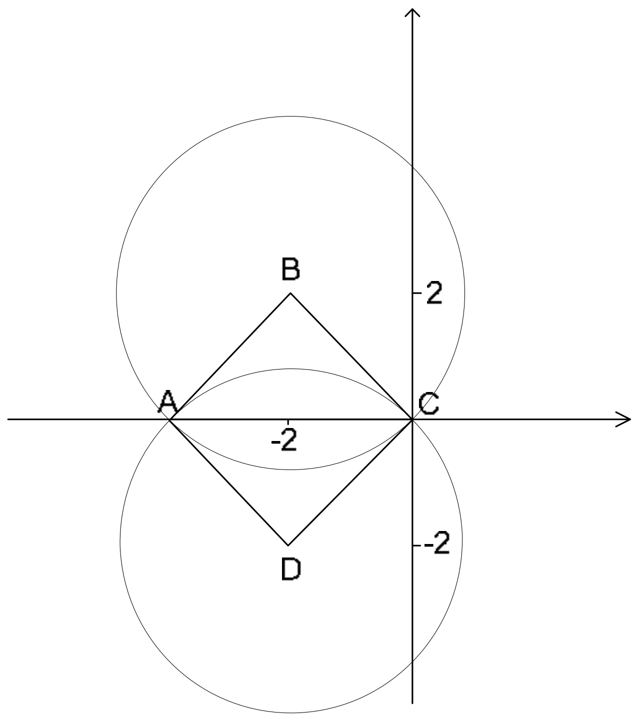
$\left(x+2\right)^2+\left(|y|-2\right)^2\le\left(2\sqrt{2}\right)^2$

Неравенство задает множество точек, симметричное относительно оси Ox, при $y\ge 0$ это внутренняя часть круга с центром в точке $B\left(-2;2\right)$ радиуса $2\sqrt{2}$.

Окружности пересекаю ось Ox в точках $A\left(-4;0\right)$ и $C\left(0;0\right)$.

Отрезки AC и BD равны и перпендикулярны, следовательно $ABCD$ квадрат с диагоналями равными 4, стороной $2\sqrt{2}$, площадью равной 8.

Квадрат $ABCD$ отсекает от кругов секторы с углами 90°, площади оставшихся частей круга равны $\frac{3}{4}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=6\pi$. В результате искомая площадь равна $12\pi+8$.



Ответ: $12\pi+8$.

4. **Задача:** На шахматной доске 8х8 расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» - это шашка, которая перевернута нечетное количество раз. Сколько «Дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от нее?

Решение: Очевидно, что каждая шашка переворачивается столько раз, сколько у ее номера делителей. Поэтому «дамок» будет столько, сколько номеров от 1 до 64 имеют нечетное число делителей, а таким свойством обладают только полные квадраты. То есть номера «дамок», оставшихся на доске будут 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и 64, что составляет 8 штук.

Ответ: 8.

5. **Задача:** Решите уравнение

$$\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1\right)=\left(x^7+x^6+\ldots+x+1\right)^2.$$

Решение: Домножим обе части уравнения на $\left(x-1\right)^2$, тогда уравнения примет вид:

$\left(x^4-1\right)\left(x^{12}-1\right)=\left(x^8-1\right)^2$, раскрываем скобки:

$$x^{16}-x^{12}-x^4+1=x^{16}-2x^8+1$$

$$x^{12}-2x^8+x^4=0$$

$$x^4(x^8-2x^4+1)=0$$

$$x^4\left(x^4-1\right)^2=0$$

$$x=0,1,-1.$$

Корень $x=1$ мог возникнуть из-за домножения на $\left(x-1\right)^2$, проверкой убеждаемся, что $x=1$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: -1, 0.

6. **Задача:** При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}+x=a?$$

Решение: Заметим, что подкоренное выражение можно представить в виде полного квадрата.

$x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=x+\frac{1}{4}+2\cdot\sqrt{x+\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$, тогда уравнение примет вид

$\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}+x=a$, извлекаем корень

$\left|\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right|+x=a$, подмодульное выражение всегда больше нуля, поэтому

$\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}+x=a$.

Левая часть уравнения опять представляет из себя полный кврдрат.

$\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=a$. Уравнение имеет решения только при $a\geq 0$.

1) Если $a=0$, то $\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=0$, $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=0$, $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$ и решений нет.

2) Если $a>0$, то $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{a}$, $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a}$.

Уравнение $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}-\sqrt{a}$ не имеет решений, так как правая часть меньше нуля.

Уравнение $\sqrt{x+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}+\sqrt{a}$ имеет решение, если $-\frac{1}{2}+\sqrt{a}\geq 0$, то есть $a\geq\frac{1}{4}$.

$x+\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{a}\right)^2$, $x=-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{a}\right)^2$ при указанный значениях a решение единственно.

Ответ: $a\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$

7. **Задача:** Докажите неравенство $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+...+\sqrt{4030}\leq 2015\sqrt{2016}$.

Решение:

1 способ. Воспользуемся известным неравенством $\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2 \le x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, основанным на неравенстве Коши: $2x_ix_j \le x_i^2+x_j^2$, для любых положительных чисел $x_i, x_j \left(1\le i, j\le n\right)$. Поэтому:

$$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030} \le \sqrt{2015}\sqrt{2+4+6+\ldots+4030} = 2015\sqrt{2016}.$$

2 способ. Поделим обе части неравенства на $\sqrt{2016}$:

$$\sqrt{\frac{2}{2016}}+\sqrt{\frac{4}{2016}}+\sqrt{\frac{6}{2016}}+\ldots+\sqrt{\frac{4030}{2016}} \le 2015,$$

$$\sqrt{1\cdot\frac{2}{2016}}+\sqrt{1\cdot\frac{4}{2016}}+\sqrt{1\cdot\frac{6}{2016}}+\ldots+\sqrt{1\cdot\frac{4030}{2016}} \le 2015,$$ для каждого корня воспользуемся неравенством Коши $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$:

$$\sqrt{1\cdot\frac{2}{2016}}+\sqrt{1\cdot\frac{4}{2016}}+\sqrt{1\cdot\frac{6}{2016}}+\ldots+\sqrt{1\cdot\frac{4030}{2016}} \le$$

$$\le \frac{1+\frac{2}{2016}}{2}+\frac{1+\frac{4}{2016}}{2}+\frac{1+\frac{6}{2016}}{2}+\ldots+\frac{1+\frac{4030}{2016}}{2} =$$

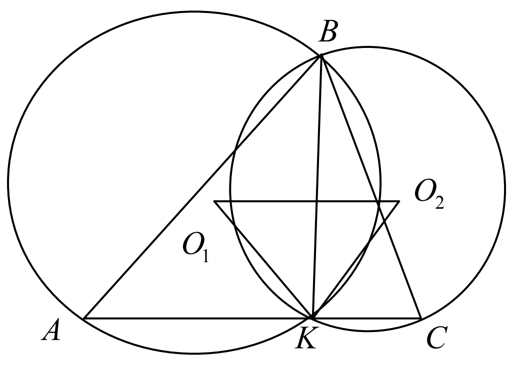
$$= 2015\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2016}+\frac{2}{2016}+\frac{4}{2016}+\ldots+\frac{2015}{2016}\right) =$$

$$= 2015\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2016}\cdot\left(\frac{1+2015}{2}\right)\cdot 2015 = 2015.$$

Ответ: ч.т.д.

8. В остроугольном треугольнике ABC угол B = 75^0. На стороне AC выбирается точка K. Около треугольников ABK и CBK описываются окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найдите радиус окружности, описной около треугольника ABC, если наименьшая из возможных длина отрезка O_1O_2 = 2 см.

Решение:



Так как ВК – общая хорда двух данных окружностей, то O_1O_2 – серединный перпендикуляр к ВК. Поэтому $\angle O_2O_1K = \frac{1}{2}\angle BO_1K = \angle BAK$, как вписанный относительно центрального. Аналогично, $\angle O_1O_2K = \frac{1}{2}\angle BO_2K = \angle BCK \Rightarrow$ треугольник O_1O_2K подобен треугольнику ABC (по двум углам).

Так как АВ – хорда первой окружности, то ее радиус не меньше половины любой хорды. Поэтому коэффициент подобия треугольников O_1O_2K и ABC не меньше 0,5 $\Rightarrow$ $O_1O_2 : AC \geq 1:2 \Rightarrow$ наименьшая возможная длина $O_1O_2 = 0,5AC$, т.е. O_1O_2-средняя линия треугольника $ABC \Rightarrow AC = 4$.

Тогда по следствию из теоремы синусов $R = \dfrac{AC}{2\sin\angle ABC} = \dfrac{4}{2\sin 75^o} = \dfrac{2}{\sin 75^o} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ см.

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Баллы	9	10	12	12	12	15	15	15	100

Задача 1.

Баллы	
9	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
6	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	Задача доведена до ответа, решение содежит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Верно нарисована фигура, площадь вычислена с арифметической ошибкой..
4	Верно нарисована фигура, площадь не посчитана.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	

12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения получен ответ, отличающийся от правильного включением/исключением граничных точек.
4	Верно начато решение задачи (под знаком сложного радикала выделен полный квадрат), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует. Например, не проведена индукция.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Радиус найден с арифметической ошибкой, но верно построен рисунок и доказано подобие треугольников.
5	Верно построен рисунок и верно найден радиус, но без обоснования минимальности.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.