Первый (заочный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2015 г.

Решение задач заочного тура 10 класс.

Задача 1. Студент Вася, живущий загородом, каждый вечер после учебы приезжает на электричке на станцию в 18 вечера. К этому времени за ним приезжает на автомобиле отец и отвозит его домой. Однажды у Васи отменилась последняя пара в институте, и он приехал на станцию на час раньше. К сожалению, он забыл дома телефон, поэтому пошел пешком навстречу машине, встретил ее и приехал домой на 20 минут раньше, чем обычно. Сколько времени было на часах в момент встречи Васи с отцом?

Решение:

Вася приехал домой на 20 минут раньше, чем обычно, за это время отец на автомобиле дважды проехал бы путь, который Вася прошел. Следовательно, на пути к станции отец сэкономил 10 минут и встретил Васю на 10 минут раньше обычного, то есть, в 17:50.

Ответ: 17:50.

Задача 2. Считая, что $1580! = a$, вычислить: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + 1580\cdot 1580!$ $\left(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\right)$

Решение:

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + 1580\cdot 1580! =$

$= (2-1)\cdot 1! + (3-1)\cdot 2! + \left(4-1\right)\cdot 3! + \ldots + \left(1581-1\right)\cdot 1580! =$

$= 2\cdot 1! - 1! + 3\cdot 2! - 2! + 4\cdot 3! - 3! + \ldots + 1581\cdot 1580! - 1580! =$

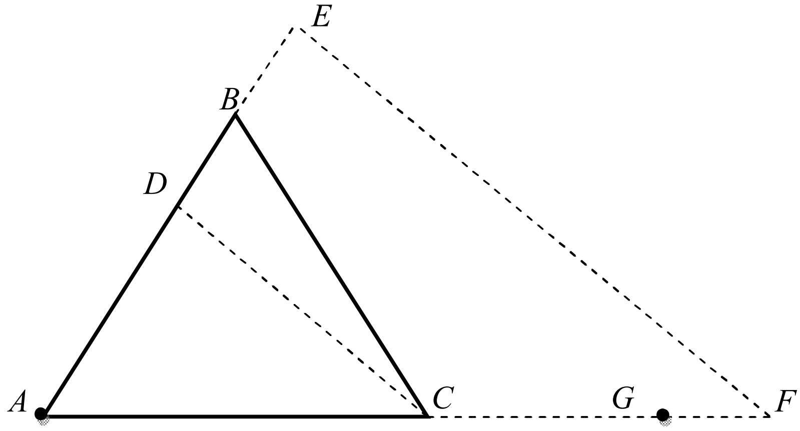
$= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \ldots + 1581! - 1580! =$

$= -1! + 1581! = 1581\cdot 1580! - 1 = 1581a - 1$

Ответ: $1581a - 1$

Задача 3. Даны отрезки a и b (a > b). Постройте отрезок длины $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ с помощью циркуля и линейки.

Решение:



Построим равносторонний треугольник ABC со сторонами AB= AC=BC=*a*. Отложим на прямой AB отрезки BD=DE=*b*. Построим прямую EF параллельную DC, где F – точка пересечения AC и EF. На прямой AF в сторону точки A отложим отрезок FG = *b*. Отрезок AG искомый.

Доказательство.

1). Преобразуем данное выражение :

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{a^2+b^2-2ab+2ab}{a-b} = \frac{\left(a-b\right)^2}{a-b} + \frac{2b}{a-b} = a-b+\frac{2b}{a-b}.$$

2). $\Delta ADC \sim \Delta AEF \Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \dfrac{AD+DE}{AD} = \dfrac{AC+CF}{AC} \Rightarrow \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{CF}{AC} \Rightarrow CF = \dfrac{2ab}{a-b}.$

$$AG = AF - GF = a-b+\frac{2ab}{a-b}.$$

ч.т.д.

Задача 4. Найти целочисленные решения уравнения: $2x^4-4y^4-7x^2y^2-27x^2+63y^2+85=0$.

Решение: Сделаем замену: $x^2=a$, $y^2=b$, тогда уравнение примет вид:

$$2a^2-4b^2-7ab-27a+63b+85=0$$

$$2a^2-(7b+27)a-4b^2+63b+85=0$$

$D=(9b-7)^2$, корни уравнения $a_1=4b+5$ и $a_2=\dfrac{17-b}{2}$

Случай 1: $a=4b+5 \Leftrightarrow x^2=4y^2+5 \Leftrightarrow x^2-4y^2=5 \Leftrightarrow (x-2y)\cdot(x+2y)=5$

Возможны четыре варианта:

$$\begin{cases}x-2y=1\\x+2y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x-2y=5\\x+2y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x-2y=-1\\x+2y=-5\end{cases}\quad\begin{cases}x-2y=-5\\x+2y=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$$

Случай 2: $a=\dfrac{17-b}{2} \Leftrightarrow 2x^2=17-y^2 \Rightarrow 2x^2\le 17 \Leftrightarrow x^2\le 8{,}5 \Rightarrow$

x^2 может принимать значения 0, 1 или 4, вычисляем $y^2=17-2x^2 \Rightarrow$

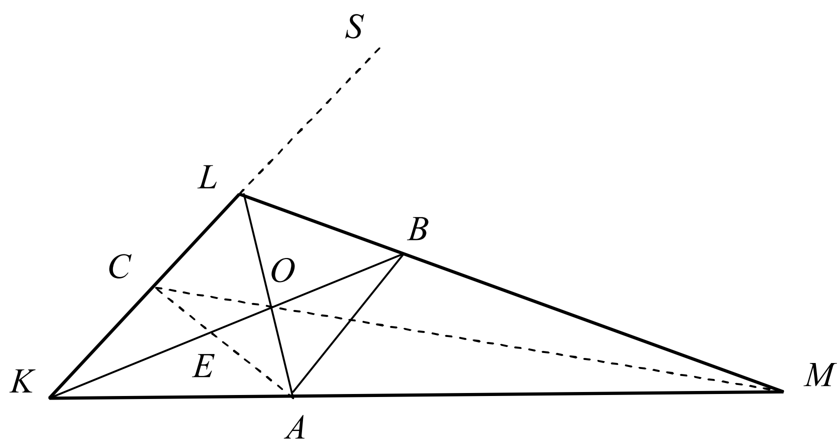
$$\begin{cases}x^2=0\\y^2=17\end{cases}\quad\begin{cases}x^2=1\\y^2=15\end{cases}\quad\begin{cases}x^2=4\\y^2=9\end{cases}$$

$$\varnothing\qquad\varnothing\qquad\begin{cases}x=\pm 2\\y=\pm 3\end{cases}$$

Ответ: $(3;\pm 1)$, $(-3;\pm 1)$, $(2;\pm 3)$, $(-2;\pm 3)$

Задача 5. В треугольнике KLM с углом L = 120° проведены биссектрисы LA и KB углов KLM и LKM соответственно. Найдите величину угла KBA.

Решение.



1). Пусть KS продолжение KL за точу L.Тогда LM биссектриса угла MLS, т.к. $\angle MLS = \angle MLA = \angle ALK = 60^o$. Точка B – пересечение биссектрис LM и KB углов SLA и SKM соответственно $\Rightarrow$ пересечение биссектрис внешних углов треугольника KLA $\Rightarrow$AB – биссектриса угла LAM.

2). Аналогично доказывается, что AC – биссектриса угла LAK, но углы LAM и LAK – смежные $\Rightarrow \angle CAB = 90^o$.

3). В треугольнике KLA: E – точка пересечения биссектрис $\Rightarrow$ $\angle KEA = \frac{1}{2}\angle KLA + 90^o = \frac{1}{2}60^o + 90^o = 120^o \Rightarrow \angle BEA = 180^o - 120^o = 60^o$.

4). В треугольнике BEA: $\angle A = 90^o \Rightarrow \angle B = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o$.

Ответ: $\angle KBA = 30^o$.

Задача 6. Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную системой неравенств и найдите ее площадь $\begin{cases} |x+5| + \sqrt{3}|y-1| \le 3 \\ y \le \sqrt{4-4x-x^2} + 1 \\ |2y-1| \le 5 \end{cases}$.

Решение:

Первое неравенство задает область внутри ромба с центром в точке $(-5;1)$ и диагоналями равными 6 и $2\sqrt{3}$.

Второе неравенство задает область под верхней полуокружностью с центром в точке $(-2;1)$ радиуса $2\sqrt{2}$.

Третье неравенство: полоса $-2 \le y \le 3$.

Пересечением является фигура, состоящая из двух областей – сектора круга CAD и треугольника CAB. (см. рис.)

Найдем площадь сектора S_1.

Тангенс угла CAD равен отношению диагоналей ромба $tg\angle CAD=\frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно $\angle CAD=30^\circ$, тогда $S_1=\frac{1}{12}S_{круга}$, где $S_{круга}=8\pi$. Получаем $S_1=\frac{2}{3}\pi$.

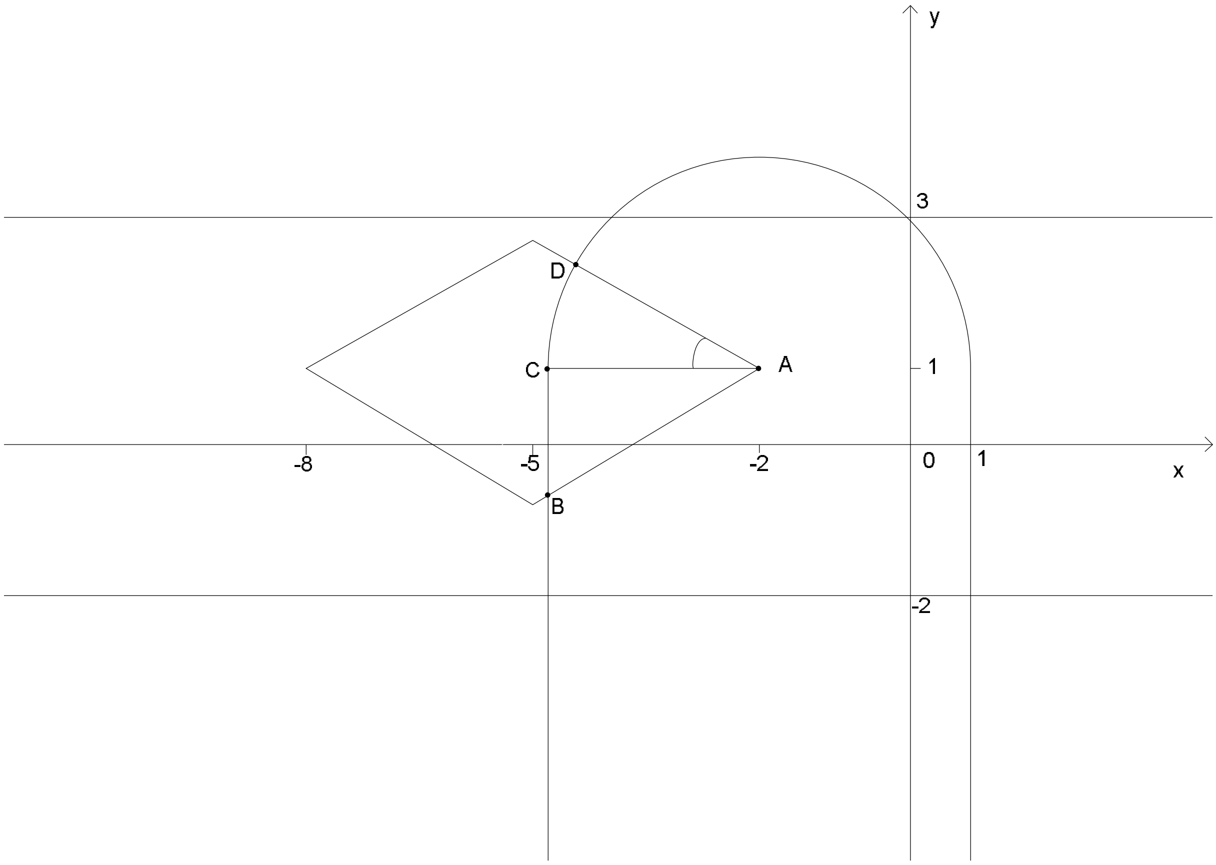
Найдем площадь треугольника S_2.

$$S_2=\frac{1}{2}AC\cdot BC$$

$$AC=R=2\sqrt{2},\ BC=AC\cdot tg\angle DAC=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Искомая площадь $S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\sqrt{3}$



Ответ: $\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\sqrt{3}$

Критерии проверки заданий 10-го класса

Задание	1	2	3	4	5	6	Итого
Баллы	15	15	15	15	20	20	100

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
5	Верный ход решения, но неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
10	Решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ходе построения есть замечания к четкости его изложения и обоснования.
5	Верно выполнено преобразование данного выражения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
9	Верно решено одно из полученных уравнений.
3	Левая часть уравнения верно разложена на множители.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованно получен правильный ответ.
15	Площадь искомого множества найдена с арифметической ошибкой.
10	Верно построено искомое множество точек.
5	Верно построено множество точек, удовлетворяющих первому или второму неравенствам.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.