МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
2 тур, 9 класс, 15 февраля 2015 года

ВАРИАНТ 1

1. Десятичная запись натурального числа N содержит 1580 цифр. Среди этих цифр есть тройки, пятёрки и семёрки и нет других цифр. Известно, что число семёрок на 20 меньше числа троек. Найдите остаток от деления числа N на 3.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} p^2+q^2+r^2=6, \\ pq-s^2-t^2=3. \end{cases}$

3. При каких значениях параметра a функция $y=\dfrac{5}{x^2-2x+20}$ убывает на отрезке $[2a;\,2-a]$?

4. Найдите множество всех значений параметра a, при которых сумма кубов корней уравнения $x^2-ax+a+2=0$ равна -8.

5. На доске написаны два различных натуральных числа, большее из них равно 2015. Разрешается заменить одно из чисел на их среднее арифметическое (если оно целое). Известно, что такую операцию провели 10 раз. Найдите, какие числа были написаны на доске изначально.

6. На стороне AB правильного треугольника ABC как на основании построены равнобедренный треугольник ABD с углом D, равным 90°, и равнобедренный треугольник ABE с углом E, равным 150°, так что точки D и E лежат внутри треугольника ABC. Докажите, что $CD=DE$.

7. Дан тругольник со сторонами 6, 8 и 10. Найдите длину наименьшего отрезка, соединяющего точки на сторонах треугольника и делящего его на две равновеликие части.

8. Изобразите на координатной плоскости Oab множество всех точек, для которых система $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |x|+|y|=|b| \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**
Баллы	8	10	10	12	12	16	16	16	**100**

МГТУ им. Н.Э.Баумана
Олимпиада школьников «Шаг в будущее»
2 тур, 9 класс, 15 февраля 2015 года

ВАРИАНТ 2

1. Десятичная запись 2015-значного натурального числа N содержит цифры 5, 6, 7 и не содержит других цифр. Найдите остаток от деления числа N на 9, если известно, что количество пятёрок в записи числа на 15 больше количества семёрок.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{z}=4, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}-\sqrt{w}=2. \end{cases}$

3. При каких значениях параметра a функция $y=\dfrac{8}{x^2+4x+44}$ возрастает на отрезке $[a-3;3a]$?

4. Найдите множество всех значений параметра a, при которых сумма кубов корней уравнения $x^2+ax+a+1=0$ равна 1.

5. На доске написаны два различных натуральных числа, большее из них равно 1580. Разрешается заменить одно из чисел на их среднее арифметическое (если оно целое). Известно, что такую операцию провели 10 раз. Найти, какие числа были написаны на доске изначально.

6. На диагонали AC квадрата $ABCD$ как на основании построен равнобедренный треугольник AEC с углом при вершине E, равным 30°, и правильный треугольник AFC так, что точка F лежит внутри треугольника AEC. Докажите, что $BE=FD$.

7. Дан треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Найдите длину наименьшего отрезка, соединяющего точки на сторонах треугольника и делящего его на две равновеликие части.

8. Изобразите на координатной плоскости Oab множество всех точек, для которых система $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x+|y|=b \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**
Баллы	8	10	10	12	12	16	16	16	**100**