Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2014 г.

Вариант № 1

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B. (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x-24}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{x-24}}<\dfrac{24}{5}$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3=327$ и сумма $S_{57}=57$? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}=\sin x+\cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|2x-5|<2$. (8 баллов)

5. Решите неравенство

$\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)\left(\left|x^2-4x+2\right|-|x-2|\right)\le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{g^2(x)-245}$, где $g(x)=15-2\cos 2x-4\sin x$. (10 баллов)

7. Вписанная в треугольник окружность точкой касания делит одну из его сторон на отрезки равные 3 и 4. Найдите площадь треугольника, если радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$. (12 баллов)

8. На прямой $3x+4y=2$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2$, и напишите уравнения этих касательных. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$\begin{cases} 4\sqrt{y}=x-a, \\ y^2-x^2+2y-4x-3=0. \end{cases}$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом a. (12 баллов)

10. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=1$ и $AD=10$ служит основанием пирамиды $SABCD$, а ребро $SA=4$ перпендикулярно основанию. Найдите на ребре AD такую точку M, чтобы треугольник SMC имел наименьший периметр. Найдите площадь этого треугольника. (12 баллов)

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2014 г.

Вариант № 6

1. Из пункта *A* в пункт *B* вышел пешеход. Когда он прошёл 8 *км*, следом за ним из пункта *A* отправился второй пешеход. Когда второй пешеход прошел 15 *км*, первый был в середине пути, а в пункт *B* пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами *A* и *B*? (8 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}-\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}<\frac{7}{12}$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии, у которой сумма $S_3=-141$ и сумма $S_{35}=35$?(8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{2+\cos 2x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\sin x-\sqrt{3}\cos x$. Найдите все его корни, удовлетворяющие условию $|x-3|<1$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{|x-2|-|x^2-4x+2|}{2\sqrt{2x^2+7x+3}-3x-4}\geq 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\sqrt{13-g^2(x)}$, где $g(x)=(13/4)-\cos^2 x+\sin x$. (10 баллов)

7. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке D, причем $BD=5$. Найдите радиус этой окружности и площадь треугольника ABC, если угол A равен $60°$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $7/\sqrt{3}$.

(12 баллов)

8. На оси Oy найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=1-2x-x^2$, и напишите уравнения этих касательных.

(12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $x=4\sqrt{y}+a,\ y^2-x^2+3y-5x-4=0$ имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом a. (12 баллов)

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB=4$, $AD=2$, $AA_1=3\sqrt{2}$ через диагональ BD_1 проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 так, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения. (12 баллов)