



"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МИТУ им. Н.Э. Баумана

А.А. Александров

2015 г.

**Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников
«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»**

Типовой вариант задания

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется велосипедист со скоростью 15 км/ч , а из пункта B в пункт C выходит турист со скоростью 5 км/ч . Через 1 час 24 минуты после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)
2. Решите неравенство $\log_x(6x - 5) > 2$. (8 баллов)
3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 463. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\sin 7x + \sqrt[4]{1 - \cos^{11} 3x \cos^2 7x} = 0$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $(3^{4x^2-10} - 9 \cdot 3^{24x+1}) \log_{\sin \pi x}(x^2 - 7x + 12,25) \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_3(40 \cos 2x + 41)$ при $x \in [(5/3)(\arctg(1/5))\cos(\pi - \arcsin(-0,8)); \arctg 3]$ (10 баллов)
7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , $AE = \sqrt{3}$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD . (12 баллов)
8. На прямой $y = -15/2$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 30° . (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x - a)^2 = 18(y - x + a - 4)$, $\log_{(x/4)}(y/4) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно $12/5$, а гипотенуза основания призмы равна 4? (12 баллов)

Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 км/ч , а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 км/ч . Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)
2. Решите неравенство $\log_x(4x-3) > 2$. (8 баллов)
3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^{15} 3x \cos^2 5x} = \sin 5x$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $(3^{x^2-1} - 9 \cdot 3^{5x+3}) \log_{\cos x}(x^2 - 6x + 9) \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_3(10 \cos 2x + 17)$ при $x \in [1, 25(\arctg 0,25)\cos(\pi - \arcsin(-0,6)); \arctg 3]$. (10 баллов)
7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , $EC = 1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1 : 2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD . (12 баллов)
8. На прямой $y = -5/3$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = 16(y-x+a-3)$, $\log_{(x/3)}(y/3) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$? (12 баллов)

Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)
2. Решите неравенство $\log_x(5x-4) > 2$. (8 баллов)
3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211 . (8 баллов)
4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^7 15x \cos^2 9x} = \sin 9x$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $(2^{x^2-6} - 4 \cdot 2^{x+4}) \log_{\cos x}(x^2 - 2x + 1) \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_2(5 \cos 2x + 11)$ при $x \in [1, 25(\arctg(1/3)) \cos(\pi + \arcsin(-0,6)); \arctg 2]$. (10 баллов)
7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD . (12 баллов)
8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = 9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}(y/2) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2 , а гипотенуза основания призмы равна 4 ? (12 баллов)