

2 тур 10 класс олимпиады МГТУ «Шаг в будущее»

2014-2015 учебный год

ВАРИАНТ 1

1. Сравните числа  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  и  $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ .

2. Пусть  $\{a_n\}$  - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\left( \left( \frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}} \right) \right)^{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}}}{\frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}}}$$

3. Лицеист сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Чертановская и насчитал 30 ступенек. На станции он увидел завуча лица, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

4. Решите уравнение  $\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23$ .

5. Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y - 2x - 3633)(1580^{x^2} + x^2 + x + 3) = 1580$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x^2 + 2x + (a + 3))^2 = a^2 x^2$  имеет три различных корня.

7. Решите уравнение  $|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 10| + |x + 10| = 20x$ .

8. Найдите сумму корней уравнения  $f^3(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x^3 + \frac{2}{x}$ , где  $f(x) = 3x^3 - x$ .

9. В каждой вершине равностороннего треугольника со стороной  $\sqrt{10}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{5}$ , внутренние области которых закрасили серой, бурой и малиновой краской. Найдите площадь серо-буро-малиновой области.

10. Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}$ ,  $2\sqrt{5}$ , 8. На его сторонах во внешнюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	100

## ВАРИАНТ 2

1. Сравните числа  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  и  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ .

2. Пусть  $\{a_n\}$  - арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\frac{\frac{1}{a_{2015}} - \frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}} + \frac{1}{a_{1580}}} : \left( \left( \frac{1}{a_{2014}} + \frac{1}{a_{1581}} \right) : \left( \frac{1}{a_{2014}} - \frac{1}{a_{1581}} \right) \right)^{-1}$$

3. Бауманец сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Бауманская и насчитал 40 ступенек. На станции он вспомнил, что забыл в Университете курсовую работу, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 280 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

4. Решите уравнение  $\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14$ .

5. Найдите все целые числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $(2y + 2x + 3023)(1580x^2 + x^2 - x - 3) = 2014$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x^2 + 3x + (a + 4))^2 = a^2x^2$  имеет три различных корня.

7. Решите уравнение  $|x + 1| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| + \dots + |x + 10| + |x - 10| = -20x$ .

8. Найдите сумму корней уравнения  $g^3(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = 5x^3 + \frac{1}{x}$ , где  $g(x) = x^3 + x$ .

9. В каждой вершине квадрата со стороной  $\sqrt{6}$  построили окружности радиуса  $\sqrt{6}$ , внутренние области которых закрасили разными цветами: серым, бурым, малиновым и в крапинку. Найдите площадь области, закрашенной всеми четырьмя цветами.

10. Дан треугольник со сторонами  $2\sqrt{13}$ ,  $2\sqrt{5}$ ,  $8$ . На его сторонах во внутреннюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Итого
Баллы	8	8	10	10	10	10	10	10	12	12	100