Решение заданий заочного тура 9 класс.

Задача 1.

Библиотекарь физико-математического лицея заметила, что если количество учебников геометрии в школьной библиотеке увеличить в несколько (целое число) раз и добавить к полученному числу количество учебников алгебры, то получится 2015. А если количество учебников алгебры увеличить во столько же раз и прибавить к полученному числу количество учебников геометрии, то получится 1580. Сколько учебников алгебры в библиотеке?

Решение. Обозначим количество учебников геометрии x, а количество учебников алгебры y. Составим систему

$$\begin{cases} xn + y = 2015, \\ yn + x = 1580. \end{cases}$$

Запишем равносильную систему, уравнения которой представляют собой сумму и разность уравнений составленной системы:

$$\begin{cases} x(n+1) + y(n+1) = 3595, \\ x(n-1) - y(n-1) = 435 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(n+1) = 5\cdot 719, \\ (x-y)(n-1) = 3\cdot 5\cdot 29. \end{cases}$$

Множитель $(n+1)$ числа $5\cdot 719$ должен быть на 2 больше множителя $(n-1)$ числа $3\cdot 5\cdot 29$. Очевидно, это выполняется только при $n=4$. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 719, \\ x - y = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 432, \\ y = 287. \end{cases}$$

Ответ: 287.

Задача 2.

Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения $ax^2 + 2x + 1 = 0$ в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.

Решение. $D = 4 - 4a$.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{a} = \frac{4-4a}{a^2} = \frac{D}{a^2}.$$

Получаем уравнение: $\frac{D}{a^2}\cdot 9 = D$. Условию $D > 0$ удовлетворяет только корень $a = -3$.

Ответ: $a \in \{-3\}$.

Задача 3.

Одна сторона параллелограмма в $\sqrt{3}$ раз больше другой стороны. Одна диагональ параллелограмма в $\sqrt{7}$ раз больше другой диагонали. Во сколько раз один угол параллелограмма больше другого угла?

Решение. Пусть x — меньшая сторона, тогда $\sqrt{3}x$ — большая сторона. Пусть y — меньшая диагональ, тогда $\sqrt{7}\,y$ — большая диагональ. Имеем:

$$2x^2+2\left(\sqrt{3}\,x\right)^2=y^2+\left(\sqrt{7}\,y\right)^2,$$

откуда $x=y$.

Получаем: острый угол параллелограмма равен 30°, тупой — 150°.

Ответ: в 5 раз.

Задача 4.

В плоскости *Oxy* найти наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками $(x;y)$, координаты которых являются целыми числами и удовлетворяют уравнению $y^2=4x^2-15$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $(2x-y)(2x+y)=1\cdot3\cdot5$. Видим, что целочисленные точки, удовлетворяющие этому уравнению и лежащие в первой четверти, являются решениями следующих систем:

$$\begin{cases}2x-y=1,\\2x+y=15\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}2x-y=3,\\2x+y=5.\end{cases}$$

Это соответственно точки $(4;7)$ и $(2;1)$. Остальные точки, лежащие в плоскости *Oxy*, расположены симметрично им относительно координатных осей и начала координат.

В качестве ближайших точек можно взять пару $(2;1)$ и $(2;-1)$, расстояние между ними равно 2. Как наиболее удалённые подходит пара $(4;7)$ и $(-4;-7)$, расстояние между которыми равно $2\sqrt{4^2+7^2}=2\sqrt{65}$.

Ответ: 2; $2\sqrt{65}$.

Задача 5.

Найти наименьшее и наибольшее значение выражения $|x+2|+|y+3|$ при условии $(|x|-3)^2+(|y|-2)^2=1$.

Решение. График уравнения $(|x|-3)^2+(|y|-2)^2=1$ — объединение четырёх окружностей единичного радиуса с центрами в точках $(\pm3;2)$, $(\pm3;-2)$. График уравнения $|x+2|+|y+3|=a$ (при $a>0$) — семейство квадратов с центрами в точке $(-2;-3)$, диагонали которых параллельны осям координат и равны $2a$.

Наименьшее значение величины *a* соответствует внешнему касанию стороны квадрата ближайшей окружности, расположенной в третьей четверти. Наибольшее значение величины *a* отвечает внутреннему касанию стороны квадрата самой дальней окружности, расположенной в первой четверти. Получаем:

$$\min a=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{2}=2-\sqrt{2},$$

$$\max a=\left(5\sqrt{2}+1\right)\cdot\sqrt{2}=10+\sqrt{2}.$$

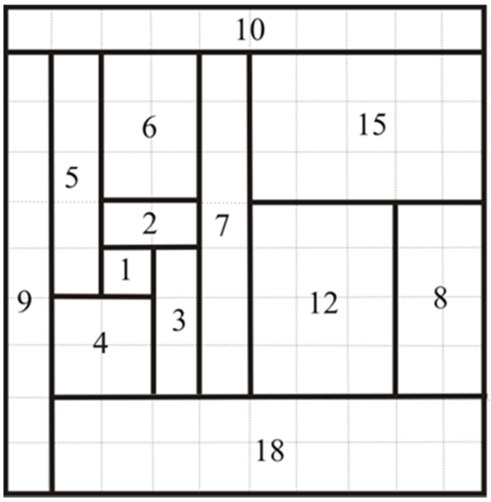
Ответ: $2-\sqrt{2}$; $10+\sqrt{2}$.

Задача 6.

Квадрат 10×10 разрезали на прямоугольники, площади которых различны и выражаются натуральными числами. Какое наибольшее число прямоугольников получится?

Решение. Площадь квадрата равна 100. Если представить 100 в виде суммы натуральных чисел, то число слагаемых будет наибольшим, если разность между числами равна одному. Возьмем прямоугольники площади 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Их суммарная площадь равна 55. Значит, сумма площадей остальных прямоугольников равна 45.

Заметим, что если площадь прямоугольника больше 10, то она не может быть простым числом, иначе такой прямоугольник имеет сторону больше 10 и не помещается в квадрат 10×10. Составными числами больше десяти являются числа 12, 14, 15, 16, 18, 19,… Любые четыре из них в сумме дают число больше 45. Сумму, равную 45, дают, например, такие тричисла: 12,15,18 или 14,15,16.



Получаем, что число прямоугольников меньше или равно 13. Пример возможного расположения для 13 прямоугольников приведен на рисунке.

Критерии оценивания заданий заочного тура 9 класс

Задача 1.

15 баллов — составлена система уравнений, сделан переход к системе

$$\begin{cases}(x+y)(n+1)=5\cdot 719,\\ (y-x)(n-1)=3\cdot 5\cdot 29.\end{cases}$$

Обоснован вывод о единственности значения $n=4$. Записан верный ответ.

14 баллов — нет ответа или в ответе указано количество учебников геометрии, а не алгебры, и т.п.

12 баллов — решение логически верное, но содержит арифметическую ошибку.

9 баллов — из системы двух уравнений сделан переход не к системе уравнений (сумме и разности), а только к одному уравнению (сумме уравнений), вследствие чего не обоснован выбор величины $n=4$.

0 баллов — прочие случаи.

Задача 2.

15 баллов — верное решение.

3 балла — приобретены лишние корни или потерян корень.

0 баллов — прочие случаи.

Задача 3.

15 баллов — обоснованно получен верный ответ.

14 баллов — в ответе записана обратная величина (0,2 или $1/5$) или записаны только значения величин углов, а не их отношение.

0 баллов — прочие случаи.

Задача 4.

15 баллов — обоснованное решение.

10 баллов — нет полноты перебора всех целочисленных решений уравнения (возможно, с использованием соображений симметрии), т.е. приведены некоторые точки, найденные подбором.

5 баллов — верно найдена только одна из двух требуемых величин.

Задача 5.

20 баллов — правильно найдены обе величины.
15 баллов — правильно найдена только одна величина.
5 баллов — правильно построены или описаны оба графика, но наибольшее и наименьшее значения найдены неверно.

Задача 6.

20 баллов — решение содержит оценку и пример.
8 баллов — приведён пример на 13 прямоугольников, но не доказано, что их не может быть больше, или дана оценка, но нет примера.