Решение заданий 2 тура 9 класса олимпиады МГТУ «Шаг в будущее»
2014-2015 учебный год

Задача 1. *I вариант*.

Десятичная запись натурального числа N содержит 1580 цифр. Среди этих цифр есть тройки, пятёрки и семёрки и нет других цифр. Известно, что число семёрок на 20 меньше числа троек. Найдите остаток от деления числа N на 3.

Решение. Обозначим буквой x количество троек в числе N. Сумма цифр числа N равна $S = 3x + 7(x-20) + 5(1580 - (2x-20)) = 7860$.

Остаток от деления S на 3 равен остатку от деления N на 3 и равен 0.

Ответ: 0.

Задача 1. *II вариант*.

Десятичная запись 2015-значного натурального числа N содержит цифры 5, 6, 7 и не содержит других цифр. Найдите остаток от деления числа N на 9, если известно, что количество пятёрок в записи числа на 15 больше количества семёрок.

Решение. Пусть в числе N имеется x семёрок. Тогда сумма цифр числа N равна $S = 7x + 5(x+15) + 6(2015 - (2x+15)) = 12075$.

$N \equiv S \equiv 6 \pmod 9$.

Ответ: 6.

Задача 2. *I вариант*.

Решите систему уравнений $\begin{cases} p^2+q^2+r^2=6, \\ pq - s^2 - t^2 = 3. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} p^2+q^2+r^2=6, \\ 2pq - 2s^2 - 2t^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (p-q)^2 + 2s^2 + 2t^2 + r^2 = 0$.

Отсюда $\begin{cases} p=q, \\ s=t=p=0. \end{cases}$

Из уравнения $p^2+q^2=6$ находим $p=q=\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $(p;q;r;s;t) \in \left\{\left(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}; 0; 0; 0\right)\right\}$.

Задача 2. *II вариант*.

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{z}=4, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{w} = 2. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{z} = 4, \\ 2\sqrt{x}\sqrt{y} - 2\sqrt{w} = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{z} + 2\sqrt{w} = 0$.

Отсюда $\begin{cases} x = y, \\ z = w = 0. \end{cases}$

Из уравнения $x + y = 4$ находим $x = y = 2$.

Ответ: $(x;\, y;\, z;\, w) \in \{(2;\, 2;\, 0;\, 0)\}$.

Задача 3. *I вариант*.

При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{5}{x^2 - 2x + 20}$ убывает на отрезке $[2a;\, 2-a]$?

Решение. Данная функция является убывающей на промежутке $[1;\, +\infty)$. Функция будет убывающей на отрезке $[2a;\, 2-a]$ при выполнении условий системы

$$\begin{cases} 2a \ge 1, \\ 2 - a > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le a < \frac{2}{3}.$$

Ответ: $a \in \left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$.

Задача 3. *II вариант*.

При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{8}{x^2 + 4x + 44}$ возрастает на отрезке $[a-3;\, 3a]$?

Решение. Данная функция возрастает на промежутке $(-\infty;\, -2]$. Функция будет убывать на отрезке $[a-3;\, 3a]$ при выполнении условий

$$\begin{cases} 3a \le -2, \\ a - 3 < 3a \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < a \le -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right]$.

Задача 4. *I вариант*.

Найдите множество значений параметра a, при которых сумма кубов корней уравнения $x^2 - ax + a + 2 = 0$ равна -8.

Решение.

1) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = a\left(a^2 - 3(a+2)\right) = a^3 - 3a(a+2)$.

2) $a^3 - 3a(a+2) = -8 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = 1, \\ a = 4. \end{array}\right.$

3) $D = a^2 - 4a - 8$.

При $a = -2$ $D = 4 + 8 - 8 = 4 > 0$ следовательно, $a = -2$ — решение.

При $a = 1$ $D = 1 - 4 - 8 < 0$ — корней нет; значит, $a = 1$ не является решением.

При $a=4$ $D=16-16-8<0$, $a=4$ также не является решением.

Ответ: $\{-2\}$.

Задача 4. *II вариант*.

Найдите множество значений параметра *a*, при которых сумма кубов корней уравнения $x^2+ax+a+1=0$ равна 1.

Решение.

1) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-a\left(a^2-3(a+1)\right)=-a^3+3a(a+1)$.

2) $-a^3+3a(a+1)=1 \iff \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=2\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

3) $D=a^2-4a-4$.

При $a=-1$ $D=1+4-4>0$ следовательно, $a=-1$ — решение.

При $a=2\pm\sqrt{3}$ $D=7\pm4\sqrt{3}-8\mp4\sqrt{3}-4=-5<0$; значит, значения $a=2\pm\sqrt{3}$ не являются решениями.

Ответ: $\{-1\}$.

Задача 5. *I вариант*.

На доске написаны два различных натуральных числа, большее из них равно 2015. Разрешается заменить одно из чисел на их среднее арифметическое (если оно целое). Известно, что такую операцию провели 10 раз. Найдите, какие числа были написаны на доске изначально.

Решение. После каждой итерации разность между написанными числами уменьшается в 2 раза. Получаем, что начальная разность должна быть кратна $2^{10}=1024$. Отсюда находим второе число: $2015-1024=991$.

Ответ: 991.

Задача 5. *II вариант*.

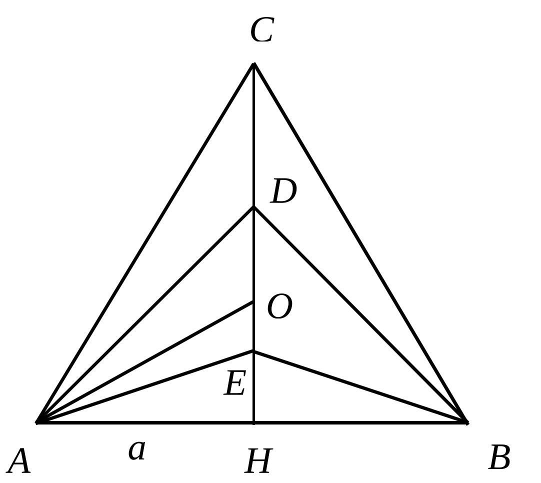
На доске написаны два различных натуральных числа, большее из них равно 1580. Разрешается заменить одно из чисел на их среднее арифметическое (если оно целое). Известно, что такую операцию провели 10 раз. Найдите, какие числа были написаны на доске изначально.

Решение. После каждой итерации разность между написанными числами уменьшается в 2 раза. Получаем, что начальная разность должна быть кратна $2^{10}=1024$. Отсюда находим второе число: $1580-1024=556$.

Ответ: 556.

Задача 6. *I вариант*.

На стороне *AB* правильного треугольника *ABC* как на основании построены равнобедренный треугольник *ABD* с углом *D*, равным 90°, и равнобедренный треугольник *ABE* с углом *E*, равным 150°, так что точки *D* и *E* лежат внутри треугольника *ABC*. Доказать, что $CD=DE$.



Решение.

Способ 1. Проведём $CH \perp AB$, $H \in AB$. Пусть $AH = a$. Тогда

$CH = a\,\mathrm{tg}\,60° = a\sqrt{3}$,

$DH = a\,\mathrm{tg}\,45° = a$,

$EH = a\,\mathrm{tg}\,15° = a\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Видим, что

$CD = CH - DH = a\left(\sqrt{3}-1\right)$,

$DE = DH - EH = a\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Утверждение доказано.

Способ 2. Пусть O — точка пересечения медиан. Тогда $CO = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$, $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

В треугольнике OAH отрезок AE является биссектрисой. Значит,

$\dfrac{OE}{EH} = \dfrac{AO}{AH} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; при этом $OE + EH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. Отсюда находим:

$$OE = \frac{2\sqrt{3}}{3\left(2+\sqrt{3}\right)}a = \frac{2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}a = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}-2\right)a.$$

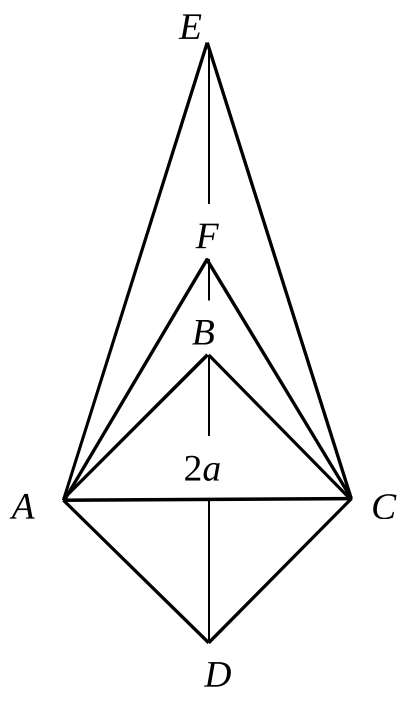
Далее вычисляем: $CD = CH - DH = \sqrt{3}a - a$,

$OD = CO - CD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a - \left(\sqrt{3}a - a\right) = \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a$,

$DE = OD + OE = \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)a + \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}-2\right)a = \left(\sqrt{3}-1\right)a = CD$.

Задача 6. *II вариант*.

На диагонали AC квадрата $ABCD$ как на основании построен равнобедренный треугольник AEC с углом при вершине E, равным 30°, и правильный треугольник AFC, так что точка F лежит внутри треугольника AEC. Доказать, что $BE = FD$.



Указание. Пусть $AC = 2a$. Тогда $BE = FD = a\left(\sqrt{3}+1\right)$.

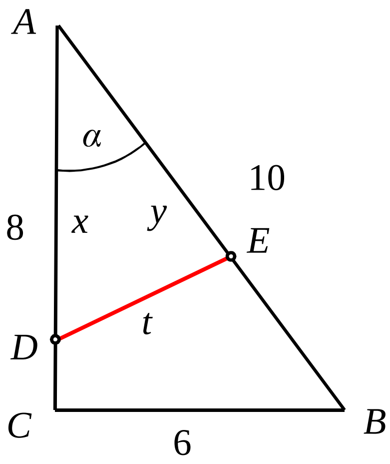
Задача 7. *I вариант*.

Дан треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Найти длину наименьшего отрезка, соединяющего точки на сторонах треугольника и делящего его на две равновеликие части.

Решение. 1) Заметим, что данный треугольник является прямоугольным: $6^2+8^2=10^2$.

2) Предположим сначала (а позже обоснуем), что концы искомого отрезка $DE=t$ лежат на большем катете $AC=8$ и гипотенузе $AB=10$ (см. рис.). Обозначим $AD=x$, $AE=y$, $\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}xy\sin\alpha=\frac{3}{10}xy.$$



3) По условию $S_{ADE}=\frac{1}{2}S_{ABC}$,

$$\frac{3}{10}xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot8,$$

$$xy=40.$$

4) $\triangle ADE$: $t^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha=$

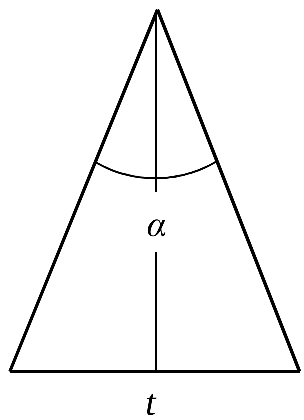
$$=x^2+y^2-2\cdot40\cdot\frac{8}{10}=$$

$$=x^2+y^2-64=$$

$$=x^2+\frac{1600}{x^2}-64.$$

По неравенству Коши $t^2\ge2\sqrt{x^2\cdot\frac{1600}{x^2}}-64=16$.

Наименьшее значение $t_{\min}=4$ достигается при условии $x=y=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.



5) В равнобедренном треугольнике с основанием t и углом при вершине α площадь равна

$$S=\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}t\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}t^2\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

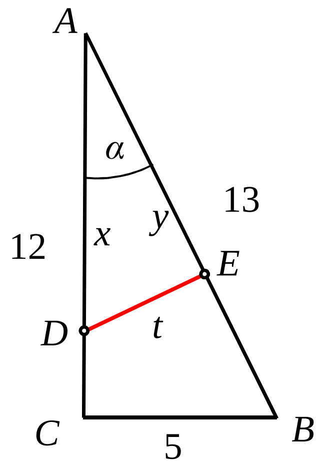
Отсюда $t=2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Ясно, что при фиксированной площади S с увеличением α основание t будет также возрастать. Поэтому найденное значение $t_{\min}$, отвечающее расположению отрезка напротив наименьшего из трёх углов треугольника, действительно является искомым.

Ответ: 4.

Задача 7. *II вариант*.

Дан треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Найти длину наименьшего отрезка, соединяющего точки на сторонах треугольника и делящего его на две равновеликие части.



Решение. 1) По обратной теореме Пифагора данный треугольник прямоугольный.

2) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $BC=5$, $AC=12$, $AB=13$ (см. рис.). Возьмём точки $D\in AC$, $E\in AB$. Обозначим $AD=x$, $AE=y$, $DE=t$, $\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}xy\sin\alpha=\frac{5}{26}xy.$$

3) $S_{ADE}=\frac{1}{2}S_{ABC}$,

$$\frac{5}{26}xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12,$$

$$xy=78.$$

4) $\triangle ADE$: $t^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha=$

$$=x^2+y^2-2\cdot 78\cdot\frac{12}{13}=$$

$$=x^2+y^2-144=$$

$$=x^2+\frac{78^2}{x^2}-144.$$

По неравенству Коши $t^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{78^2}{x^2}}-144=12$. Наименьшее значение $t_{\min}=2\sqrt{3}$ достигается при условии $x=y=\sqrt{78}$.

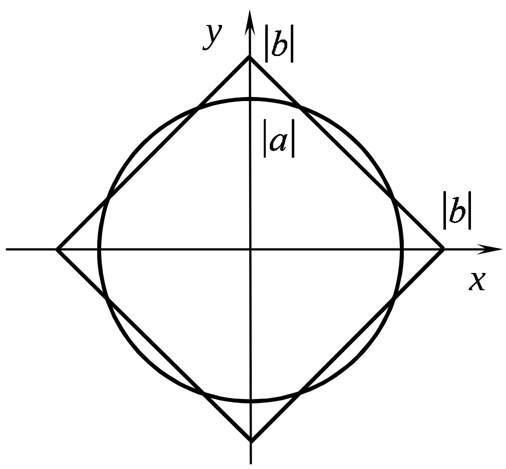
Ответ: $2\sqrt{3}$.

Задача 8. *I вариант*.

Изобразить на координатной плоскости Oab множество точек, для которых система

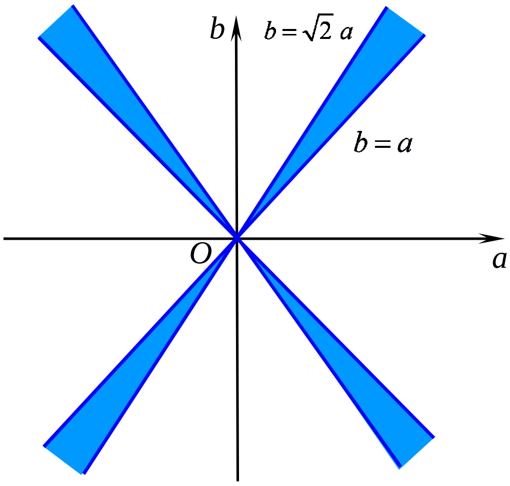
$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ |x|+|y|=|b|\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.



Решение. График первого уравнения — окружность радиуса $|a|$ с центром в начале координат; график второго уравнения — квадрат с вершинами на осях координат, половина диагонали которого равна $|b|$ (см. рис.). Система имеет решение при выполнении условия $|a|\le|b|\le\sqrt{2}\,|a|$.

Множество точек плоскости Oab, удовлетворяющих этому условию, представлено на рисунке.



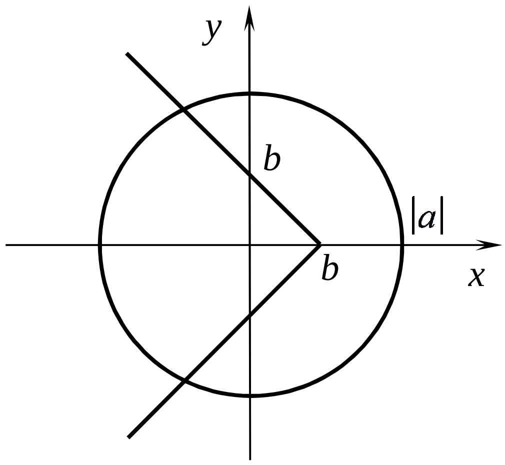
Задача 8. *II вариант*.

Изобразить на координатной плоскости Oab множество точек, для которых система

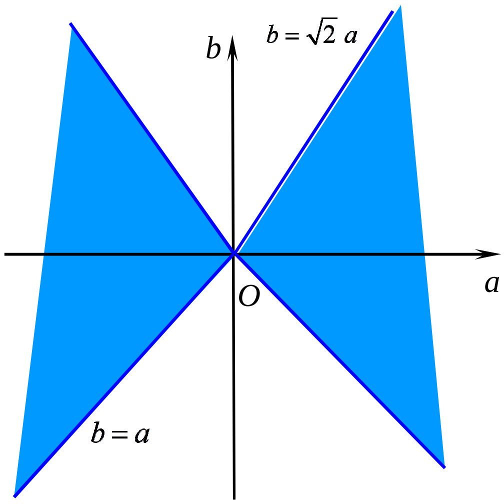
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x+|y|=b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. График первого уравнения — окружность радиуса $|a|$ с центром в начале координат; график второго уравнения — «уголок», вершина которого имеет координаты $(b;0)$ (см. рис.). Система имеет решение при выполнении условия $-|a|\le b\le\sqrt{2}\,|a|$.



Множество точек плоскости Oab, удовлетворяющих этому условию, представлено на рисунке.


$b = \sqrt{2}\,a$
b
a
O
$b = a$

Критерии проверки заданий 9-го класса

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Итого**
Баллы	8	10	10	12	12	16	16	16	**100**

Задача 1.

Баллы	
8	Обоснованно получен правильный ответ.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
10	Обоснованно получен правильный ответ.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

10	Обоснованно получен правильный ответ.
8	При верном ходе решения рассматривается строгое неравенство вместо нестрогого, или наоборот.
2	Верно рассмотрено только одно условие, второе условие на расположение концов отрезка отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	Ход решения верный, решение содержит арифметическую ошибку

6	Применена теорема Виета, но не проверена положительность дискриминанта.
3	Записана теорема Виета, дальнейшие преобразования, возможно отсутствуют, или неверны.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи (за арифметическую ошибку баллы не снижаются)
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
6	Получилось выразить только одну сторону из двух через независимую величину (например, через сторону треугольника)
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	Отсутствует только объяснение, что нужно отрезать от меньшего угла треугольника, или верное решение содержит арифметическую ошибку.
10	Отсутствует обоснование, что нужно отрезать равнобедренный треугольник.
8	Обосновано, что надо отрезать равнобедренный треугольник, но

	дальнейшее решение отсутствует или неверно.
2	Есть только верное объяснение, что надо отрезать от острого угла.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 8.

16	Обоснованно получен правильный ответ.
14	При верном ответе решение недостаточно обосновано.
8	Из-за потери модулей найдена область, границей которой являются прямые с угловыми коэффициентами $\sqrt{2}$ и 1.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.