Решение заданий заочного тура 8 класс.

1. Какое из чисел больше $2^{5^{4^3}}$ или $3^{4^{2^5}}$?

Решение:

$$2^{5^{4^3}} \vee 3^{4^{2^5}} \Leftrightarrow 2^{5^{64}} \vee 3^{4^{32}} \Leftrightarrow 2^{5^{64}} > 2^{4^{64}} = 2^{4^{63}\cdot 4} = (2^4)^{4^{63}} = 16^{4^{63}} > 3^{4^{63}} > 3^{4^{32}}$$

Ответ: $2^{5^{4^3}} > 3^{4^{2^5}}$

2. Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+3\cdot 6\cdot 9+...+n\cdot 2n\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4+4\cdot 6\cdot 8+6\cdot 9\cdot 12+...+2n\cdot 3n\cdot 4n}}.$$

Решение:

$$\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 6+...+n\cdot 2n\cdot 3n}{2\cdot 3\cdot 4+4\cdot 6\cdot 8+...+2n\cdot 3n\cdot 4n}} = \sqrt{\frac{6(1+8+27+...+n^{3)}}{24(1+8+27+...+n^3)}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3. Докажите, что если целое число *n* не делится на 5, то число n^5-n делится на 30.

Решение: $n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$.

Если целое число n не делится на 5, то $n=5k\pm 1$ или $n=5k\pm 2$.

а) $n^2-1=(5k\pm 1)^2-1=25k^2\pm 10k\,\vdots\, 5$ или $n^2+1=(5k\pm 2)^2+1=25k^2\pm 20k+5\,\vdots\, 5$, следовательно, $n^5-n\,\vdots\, 5$

б) $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)\,\vdots\, 6$, так как $n(n-1)(n+1)$ - произведение 3-х соседних целых чисел.

Числа 5 и 6 взаимно простые, значит, $n^5-n\,\vdots\, 30$.

4. Назовем билет с номером от 0001 до 2014 отличным, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число отличных билетов.

Решение. Число отличных билетов от 0001 до 2014 равно числу отличных билетов от 0000 до 2014. Посчитаем сначала число неотличных билетов от 0000 до 2014.

Число неотличных билетов от 0000 до 1999 найдем следующим образом. Пусть $a_1a_2a_3a_4$ - номер неотличного билета. Тогда, в качестве a_1 можно выбрать две цифры 0 и 1.

В качестве a_2 можно выбрать любую цифру, кроме составляющих пары 0-5, 1-6 т.е. любую из 9 цифр.

В качестве a_3, a_4 можно выбрать любую цифру, кроме составляющих пары 0-5, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9, т.е. любую из 9 цифр.

Всего будет $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ =1458 билетов.

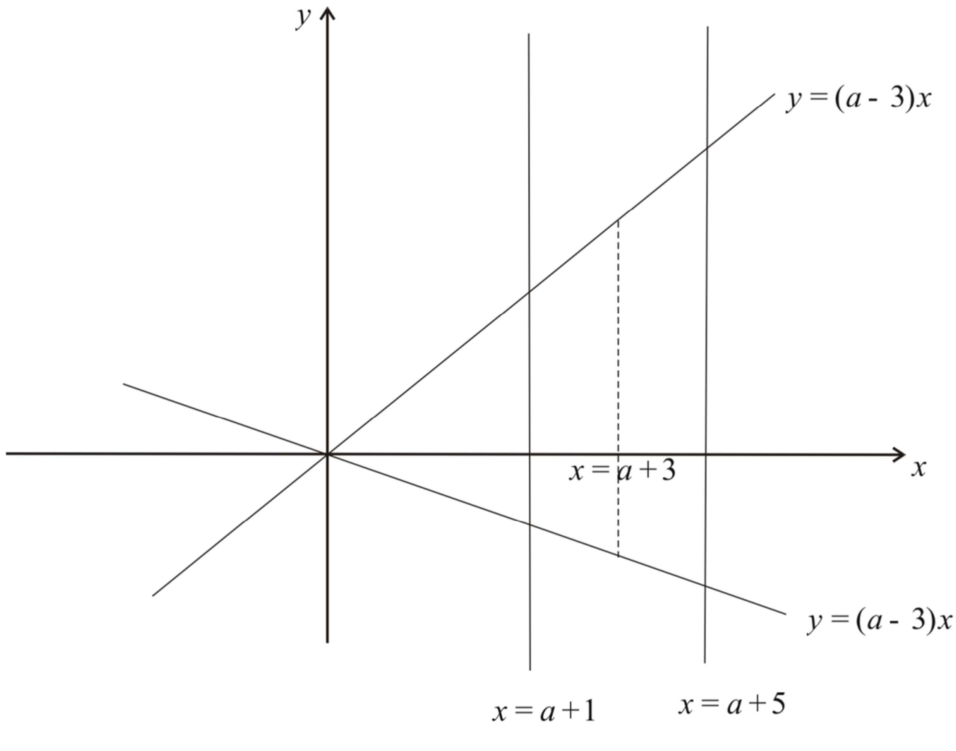
В билетах от 2000 до 2014 четырнадцать неотличных билетов (все, кроме 2005).

Итак, получаем 1458+14=1472 – неотличных, следовательно, 2015-1472=543 отличных билетов от 0000 до 2014 , значит, и от 0001 до 2014 также 543 отличных билета.

Ответ: 543.

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых площадь четырехугольника, ограниченного на координатной плоскости осью абсцисс и прямыми $x = a + 5$, $x = a + 1$, $y = (a - 3)x$, равна 28.

Решение. Прямые $x = a + 5$, $x = a + 1$– вертикальные и при любом значении параметра a расстояние между ними равно 4.



Прямая $y = (a - 3)x$ проходит через начало координат. Данные прямые и ось абсцисс ограничивают на координатной плоскости четырёхугольник, если либо $a + 1 > 0$, либо $a + 5 < 0$.

Четырёхугольник, ограниченный осью абсцисс и указанными прямыми является прямоугольной трапецией, высота которой равна 4.

Площадь трапеции $S_{трап} = l_{ср} \cdot h$ есть произведение средней линии на высоту.

При любом значении параметра a средней линией трапеции является отрезок прямой $x = a + 3$, заключенный между осью абсцисс и прямой $y = (a-3)x$. Следовательно, **длина** средней линии трапеции равна **модулю** значения функции $y = (a-3)x$ в точке $x = a + 3$. Таким образом,

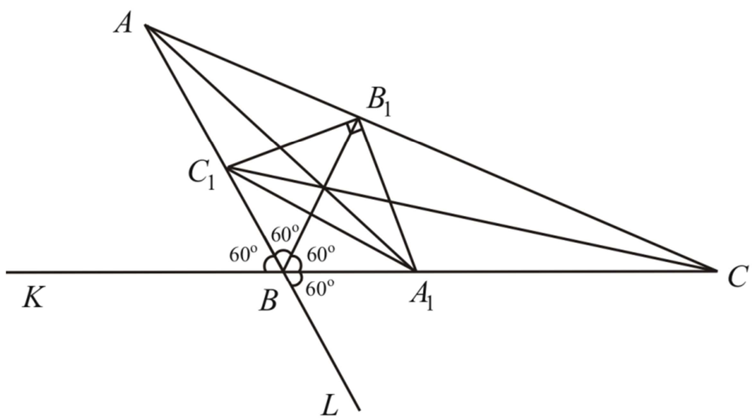
$$\begin{cases} S = \left|(a-3)(a+3)\right| \cdot 4 = 28 \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|a^2 - 9\right| = 7 \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{2}; 4$.

6. Дан треугольник *ABC* с углом *B* равным 120^0. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисы треугольника. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный.

Доказательство. Возьмем на продолжении сторон AB и CB за точку B точки L и K, соответственно.

Тогда прямая BC является биссектрисой внешнего угла B_1BL треугольника ABB_1,



AA_1 является биссектрисой внутреннего угла BAB_1 треугольника ABB_1.

Биссектрисы двух внешних и одного внутреннего углов любого треугольника пересекаются в одной точке. Так как BC и AA_1 пересекаются в точке A_1, то, пересекающаяся с ними в этой же точке, прямая B_1A_1 является биссектрисой внешнего угла CB_1B треугольника ABB_1.

Аналогично, C_1B_1 является биссектрисой внешнего угла AB_1B треугольника BB_1C.

Так как угол $CB_1A = 180^\circ$, то угол $A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

Замечание: утверждение о том, что биссектрисы двух внешних и одного внутреннего углов любого треугольника пересекаются в одной точке можно доказать используя равноудаленность ГМТ биссектрис углов от сторон этих углов.

Критерии проверки заданий 8-го класса

задание	1	2	3	4	5	6
баллы	15	15	15	15	20	20

Всего 100 баллов

Задача 1.

Баллы	
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном понимании условия задачи и правильном ответе, есть замечания к четкости изложения обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
15	Получено верное разложение на множители числителя и знаменателя дроби и получен верный ответ.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
5	Верно доказано только то, что выражение делится на 6 или на 5
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном понимании условия задачи и правильном ответе, есть замечания к четкости изложения обоснования.
5	В качестве алгоритма нахождения неотличных билетов от 0001 до 1999 описан алгоритм нахождения неотличных билетов от 0000 до 1999 .
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	Модуль поставлен в выражении для площади, но нет отбора найденных значений параметра по условию существования четырехугольника.
10	Не поставлен модуль в выражении для площади, но есть отбор найденных значений параметра по условию существования четырехугольника.
5	Составлено выражение для площади, но без модуля, и нет отбора найденных значений параметра по условию существования четырехугольника.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
17	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.