Решение заданий 2 тура 8 класса олимпиады МГТУ «Шаг в будущее» 2014-2015 учебный год

Задание 1 (1 вариант). Докажите, что выражение $7+7^2+7^3+...+7^{1580}$ делится на 400.

Решение. Сгруппируем слагаемые по четыре и вынесем общий множитель в каждой группе.

$7+7^2+7^3+...+7^{1580}==7\left(1+7+7^2+7^3\right)+7^5\left(1+7+7^2+7^3\right)+...+7^{1577}\left(1+7+7^2+7^3\right)=$
$=400(7+7^5+...+7^{1577})$.

Очевидно, полученное выражение делится на 400.

Задание 1 (2 вариант). Докажите, что выражение $3+3^2+3^3+...+3^{2015}$ делится на 121.

Решение. Сгруппируем слагаемые по пять и вынесем общий множитель в каждой группе.

$3+3^2+3^3+...+3^{2015}=$
$=3\left(1+3+3^2+3^3+3^4\right)+3^6\left(1+3+3^2+3^3+3^4\right)+...+3^{2011}\left(1+3+3^2+3^3+3^4\right)=$
$=121(3+3^6+...+3^{2011})$.

Очевидно, полученное выражение делится на 121.

Задание 2 (1 вариант). В одном из областных центров 20% семей, имеющих дочку, имеют также и сына, 25% семей, имеющих сына, имеют также и дочку, а 20% всех семей не имеют детей. Сколько % семей в городе имеют и сына и дочь?

Решение. Пусть в городе x семей, y семей имеют дочь, z семей имеют сына. Тогда, по условию задачи имеем $0,2y=0,25z$ и $y+z-0,25z+0,2x=x$, откуда $z=0,4x$, значит, $0,25z=0,1x$.

Ответ: 10 процентов.

Задание 2 (2 вариант). Известно, что в одном из городов 10% болельщиков «Зенита» болеют за «Динамо», 20% болельщиков «Динамо» болеют за «Зенит» и 30% болельщиков футбола болеют за другие команды. Сколько % болельщиков футбола в городе болеет и за «Динамо» и за «Зенит»?

Решение. Пусть в городе x болельщиков, y болельщиков «Зенита», z болельщиков «Динамо». Тогда, по условию задачи имеем $0,1y=0,2z$ и $y+z-0,2z+0,3x=x$, откуда $z=0,25x$, значит, $0,2z=0,05x$.

Ответ: 5 процентов.

Задание 3 (1 вариант). Найти наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и дает остаток равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.

Решение. Найдем наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 : оно равно 60. Тогда, исходя из условия задачи, получаем $7n = 60m + 1$. Если левая часть этого уравнения делится на 7, то и правая часть тоже должна делиться на 7.

Представив $m = 7t \pm r$, и подставляя в уравнение $7n = 60m + 1$ различные значения r , получим $m = 5$.

Таким образом, искомое число равно 301.

Ответ: 301.

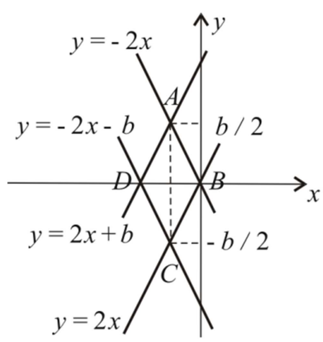
Задание 3 (2 вариант). Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9, дает в остатке 1.

Решение. Пусть n искомое натуральное число, тогда $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 9d + 1$, откуда следует, что число $n - 1$ должно одновременно делиться на 2, 5 и 9. Получаем $n =$ [2,5,9]+1 =91.

Ответ: 91.

Задание 4 (1 вариант). Найдите все значения параметра *a*, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y = 2x + b$, $y = -2x - b$, $y = 2x$, $y = -2x$, равна 9.

Решение. Полученная фигура является параллелограммом, поскольку угловые коэффициенты прямых попарно равны. Найдем координаты *A*, *B*, *C*, *D* вершин этого параллелограмма.



1)Для вершины *A*: $2x + b = -2x$, $A\left(-\dfrac{b}{4};\dfrac{b}{2}\right)$;

2) Для вершины *B*: $2x = -2x$, $B(0;0)$;

3)Для вершины *C*: $-2x - b = 2x$, $C\left(-\dfrac{b}{4};\dfrac{b}{2}\right)$;

4) Для вершины *D*: $2x + b = -2x - b$, $D\left(-\dfrac{b}{2};0\right)$.

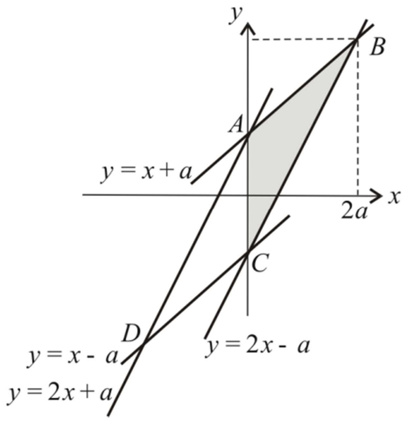
Поскольку совпадают первые координаты точек *A* и *C* и вторые координаты точек *B* и *D*, то диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны, следовательно параллелограмм *АВСД* является ромбом.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}|b|\left|\frac{b}{2}\right|=\frac{1}{4}b^2=9$. Получаем $b=\pm 6$.

Ответ: $b=\pm 6$.

Задание 4 (2 вариант). Найдите все значения параметра *a*, при которых площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости прямыми $y=2x+a$, $y=2x-a$, $y=x+a$, $y=x-a$, равна 36.

Решение. Полученная фигура является параллелограммом, поскольку угловые коэффициенты прямых попарно равны. Найдем координаты *A*, *B*, *C*, *D* вершин этого параллелограмма.



1) Для вершины *A*: $2x+a=x+a$, $A(0;a)$;

2) Для вершины *B*: $2x-a=x+a$, $B(2a;3a)$;

3) Для вершины *C*: $2x-a=x-a$, $C(0;-a)$;

4) Для вершины *D*: $2x-a=x+a$, $D(-2a;-3a)$.

Поскольку первые координаты точек *A* и *C* равны нулю, то эти точки лежат на оси *y*, значит параллелограмм разбивается диагональю AC на 2 равновеликих треугольника и

$$S_{ABCD}=2S_{ABC}=2\cdot\frac{1}{2}|AC|\cdot|x_B|=|2a|\cdot|2a|=4a^2=36.$$ Получаем $b=\pm 3$.

Ответ: $b=\pm 3$.

Задание 5 (1 вариант). Найдите все целые значения параметра *a*, при которых уравнение $2x^7+x^5-4x^3-2(a+4)x^2+15x-5a-13=0$ имеет хотя бы один целый корень.

Решение.

Заметим, что относительно параметра *a* уравнение является линейным, и его можно переписать в виде $a(2x^2+5)=2x^7+x^5-4x^3-8x^2+15x-13$.

Произведем деление «уголком» левой части уравнения на коэффициент при параметре *a*, получим $a=x^5-2x^3-3x-4+\frac{7}{2x^2+5}$. Поскольку, по условию задачи, значения *a* и *x* должны быть целыми, дробь $\frac{7}{2x^2+5}$ должна принимать целые значения. Это, с учетом положительности x^2, возможно лишь в случае $2x^2+5=7$, откуда $x=\pm 1$. Подставляя найденные значения *x* в выражение для *a*, находим, что $a=-5$ и $a=-1$.

Ответ: $-5; -1$.

Задание 5 (2 вариант). Найдите все целые значения параметра *a*, при которых уравнение $x^6 + 2x^4 - (a+5)x^2 - 4a + 25 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

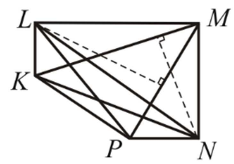
Решение. Заметим, что относительно параметра *a* уравнение является линейным, и его можно переписать в виде $a(2x^2 + 4) = x^6 - 2x^4 - 5x^2 + 25$.

Произведем деление «уголком» левой части уравнения на коэффициент при параметре *a*, получим $a = x^4 - 2x^2 + 3 + \dfrac{13}{x^2 + 4}$. Поскольку, по условию задачи, значения *a* и *x* должны быть целыми, дробь $\dfrac{13}{x^2 + 4}$ должна принимать целые значения. Это, с учетом положительности x^2, возможно лишь в случае $x^2 + 4 = 13$, откуда $x = \pm 3$. Подставляя найденные значения *x* в выражение для *a*, находим, что $a = 67$.

Ответ: 67.

Задание 6 (1 вариант). Дан пятиугольник *KLMNP*, в котором прямая *KL* параллельна прямой *MN*, прямая *NP* параллельна прямой *LM*, длина диагонали *KM* равна 20, длина диагонали *MP* равна 16. Найдите расстояние от точки *N* до прямой *KM*, если расстояние от точки *L* до прямой *PM* равно 15.

Решение. Поскольку расстояния между параллельными прямыми равны, то $S_{PML} = S_{LNM}$, $S_{LNM} = S_{KNM}$ как площади треугольников с равными основаниями и высотами, следовательно, $S_{PLM} = S_{KNM}$, то есть $\frac{1}{2} PM \cdot r(L, PM) = \frac{1}{2} KM \cdot r(N, KM)$, откуда $r(N, KM) = \dfrac{15 \cdot 16}{20} = 12$.



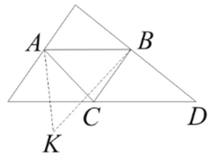
Ответ: 12.

Задание 6 (2 вариант). Дан пятиугольник *ABCDE*, в котором прямая *AB* параллельна прямой *CD*, прямая *DE* параллельна прямой *BC*, длина диагонали *AC* равна 24, длина диагонали *CE* равна 20. Найдите расстояние от точки *D* до прямой *AC*, если расстояние от точки *B* до прямой *CE* равно 18.

Решение. Аналогично решению 1 варианта, $r(D, AC) = \dfrac{20 \cdot 18}{24} = 15$.

Ответ: 15.

Задание 7 (1 и 2 вариант). На плоскости расположено n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть одним треугольником площади 4.



Решение. Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберем такой, площадь которого не меньше площади любого из остальных треугольников, и обозначим его ABC. Проведем прямую CD параллельно стороне AB. Все точки будут лежать по ту же сторону от прямой CD, что и точки A и B (или на прямой CD). Иначе, найдется такая точка K, что $S_{ADK} > S_{ABC}$, этого не может быть в силу выбора ABC. Заметим, что $S_{CDB} = S_{ABC}$, поскольку $ABCD$ параллелограмм.

Проведя аналогичные прямые через вершины A и B, получим, что все точки лежат внутри треугольника, площадь которого в 4 раза больше площади треугольника ABC, т. е. меньше или равна 4, что и требовалось доказать.

Критерии проверки заданий 8-го класса

Задание	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Итого**
Баллы	12	12	12	16	16	16	16	**100**

Задача 1.

Баллы	
12	Обоснованно получен правильный ответ.
10	При правильном понимании условия задачи и правильном ответе, есть замечания к четкости изложения обоснования.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 2.

Баллы	
12	Обоснованно получен правильный ответ.
6	Верно составлена система уравнений по условию задачи, дальнейшее решение содержит ошибки.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 3.

Баллы	
12	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи (в том числе подбором, если рассмотрены все числа меньше искомого).
10	При правильном ходе решения есть замечания к четкости его изложения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 4.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	Найдено только одно из двух значений параметра.
5	Верно построена геометрическая модель задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 5.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ходе решения допущена арифметическая ошибка.
3	При попытке найти условия существования корней уравнения имеются верные рассуждения.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 6.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
6	Получены промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

Задача 7.

Баллы	
16	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При правильном ходе доказательства есть замечания к четкости его изложения.
6	Получены промежуточные результаты, необходимые для решения задачи.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.