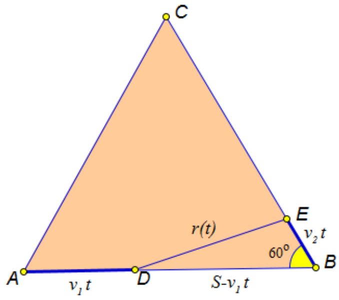
Решение типового варианта заключительного этапа академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется велосипедист со скоростью 15 $км/ч$, а из пункта B в пункт C выходит турист со скоростью 5 $км/ч$. Через 1 час 24 минуты после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)

Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между велосипедистом и туристом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем:
$r^2 = (S-15t)^2 + (5t)^2 - 5t(S-15t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между велосипедистом и туристом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:



$$(r^2)' = -2\cdot 15(S-15t) + 2\cdot 25t - 5(S-15t) + 15\cdot 5t = -35S + 2(225+25+75)t = 0.$$

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 1{,}4$, то $-35S + (225+25+75)\cdot 2{,}8 = 0$, и $S = 26$.
Ответ: 26 *км*.

2. Решите неравенство $\log_x(6x-5) > 2$.

Решение:

$\log_x(6x-5) > 2$. ОДЗ: $x \in (5/6;1)\cup(1;+\infty)$. $\log_x \dfrac{x^2}{6x-5} < 0$.

1) $\begin{cases} 5/6 < x < 1, \\ 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{6x-5} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5/6 < x < 1, \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5/6 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow 5/6 < x < 1.$

2) $\begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \dfrac{x^2}{6x-5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5.$

Ответ: $x \in (5/6;1)\cup(1;5)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 463.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 463 является решением задачи. Пусть в прогрессии не менее двух членов. По условию для некоторого натурального числа $n \ge 2$ справедливо равенство $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} = 463$, или $b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 463$. Так как 463 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13,17,19,23), то $b_1 = 1,\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = 463,$ или $b_1 = 463,\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = 1.$ Второй слу-

чай не подходит. Следовательно, $b_1=1,\ q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})=462,$
$q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})=2\cdot3\cdot7\cdot11.$ Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $n=2,$ то $q=462$. Искомые числа: 1, 462.
2) Если $n=3,$ то $q^2+q-462=0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q=24$. Искомые числа: 1, 21, 441.
3) Если $n\ge4,$ то $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})=462$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3\le q^{n-1}\le462$, $q\le7$, причем q является делителем числа $462=2\cdot3\cdot7\cdot11.$ Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 6, 7.
   1) Если $q=2,$ то $1+2+2^2+\dots+2^{n-2}=231,\ 2^{n=1}-1=231,$ или $2^{n=1}=232,$ уравнение не имеет натуральных решений.
   2) Если $q=3,$ то $1+3+3^2+\dots+3^{n-2}=154,\ \dfrac{3^{n-1}-1}{2}=154,\ 3^{n-1}=309,$ уравнение не имеет натуральных решений.
   3) Если $q=6,$ то $1+6+6^2+\dots+6^{n-2}=77,\ \dfrac{6^{n-1}-1}{5}=77,\ 6^{n-1}=386,$ уравнение не имеет натуральных решений.
   4) Если $q=7,$ то $1+7+7^2+\dots+7^{n-2}=66,\ \dfrac{7^{n-1}-1}{6}=66,\ 7^{n-1}=397,$ уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: $\{463\}$, $\{1;\,462\}$ или $\{1;\,21;\,441\}$.

4. Решите уравнение $\sin7x+\sqrt[4]{1-\cos^{11}3x\cos^2 7x}=0$. (8 баллов)

Решение: При условии $\sin7x\le0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему: $\sin^4 7x+\cos^{11}3x\cos^2 7x-1=0$,
$(1-\cos^2 7x)^2+\cos^{11}3x\cos^2 7x-1=0$, $-2\cos^2 7x+\cos^4 7x+\cos^{11}3x\cos^2 7x=0$,
$\cos^2 7x(\cos^2 7x+\cos^{11}3x-2)=0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos7x=0$, $x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi n}{7},\ n\in Z$, с учетом условия $\sin7x\le0$ имеем $x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{2\pi n}{7},\ n\in Z$.

2) $\cos^2 7x+\cos^{11}3x-2=0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases}\cos^2 7x=1,\\ \cos^{11}3x=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=\pi k,\\ 3x=2\pi m,\end{cases}$

$k,\ m\in Z.$ Следовательно, $3k=14m,\ k,m\in Z\ \Rightarrow m=3s,\ k=14s,\ s\in Z\Rightarrow x=2\pi s,\ s\in Z$, что удовлетворяет условию $\sin7x\le0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{2\pi n}{7},\ n\in Z\quad x=2\pi s,\quad s\in Z.$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{2\pi n}{7},\ n\in Z\quad x=2\pi s,\quad s\in Z.$

5. Решите неравенство $\left(3^{4x^2-10}-9\cdot3^{24x+1}\right)\log_{\sin\pi x}(x^2-7x+12{,}25)\ge0.$ (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $(x-3{,}5)^2>0,\quad \sin\pi x>0,\ \sin\pi x\neq 1,\ \Rightarrow\ x\in(2k;0{,}5+2k)\cup(0{,}5+2k;1+2k)$, $k\in Z$.

Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему

$(4x^2-24x-13)(\sin\pi x-1)(x^2-7x+11{,}25)\geq 0\ \Leftrightarrow\ (2x-13)(2x+1)(x-4{,}5)(x-2{,}5)\leq 0\ \Rightarrow$

$x\in[-0{,}5;\,2{,}5]\cup[4{,}5;\,6{,}5]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(0;\,0{,}5)\cup(0{,}5;\,1)\cup(2;\,2{,}5)\cup(4{,}5;\,5)\cup(6;\,6{,}5)$.

Ответ: $x\in(0;\,0{,}5)\cup(0{,}5;\,1)\cup(2;\,2{,}5)\cup(4{,}5;\,5)\cup(6;\,6{,}5)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_3(40\cos 2x+41)$ при $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/5)\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}8));\ \operatorname{arctg}3\right]$. (10 баллов)

Решение: Так как $\cos(\pi-\arcsin(-0{,}8))=\cos(\pi+\arcsin 0{,}8)=-\cos(\arcsin 0{,}8)=-0{,}6$, то $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/5)\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}8));\ \operatorname{arctg}3\right]=\left[-\operatorname{arctg}(1/5);\ \operatorname{arctg}3\right]$. Следовательно, $2x\in\left[-2\operatorname{arctg}(1/5);\ 2\operatorname{arctg}3\right]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}(1/5)<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}(1/5)<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}(1/5)<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}3<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}3<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}3);\,1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}3)=-0{,}8$, и $\cos 2x\in[-0{,}8;\,1]$. Отсюда имеем $40\cos 2x+41\in[9;\,81]$, и $f(x)=\log_3(40\cos 2x+41)\in[\log_3 9;\,\log_3 81]=[2;\,4]$.

Отрезок $[2;\,4]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_3(40\cos 2x+41)$ при $x\in\left[(5/3)\left(\operatorname{arctg}(1/5)\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}8));\ \operatorname{arctg}3\right]$. Сумма целых чисел из отрезка $[2;\,4]$ равна 9.

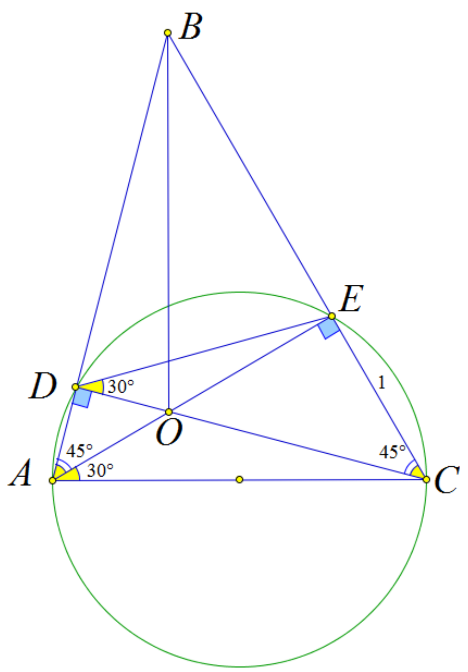
Ответ: $E_f=[2;\,4]$, сумма целых чисел равна 9.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30°, $AE=\sqrt{3}$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD.

Решение:

1) $\angle EDC=\angle EAC=30^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);
2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow\Delta AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC=90^\circ$, $\angle ECA=60^\circ$,

$$AC=\frac{AE}{\cos 30^\circ}=2,\ \ EC=AC\sin 30^\circ=1;$$



3) $\angle ADC = 90°,\ \angle EDC = 30° \Rightarrow \angle BDE = 60° \Rightarrow \Delta DBE \approx \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{AB} = k$,

$k^2 = \dfrac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow DE = \sqrt{2}$;

4) ΔDEC - теорема синусов: $\dfrac{DE}{\sin(\angle DCE)} = \dfrac{EC}{\sin 30°} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)} = 2 \Rightarrow \sin(\angle DCE) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \angle DCE = 45° \Rightarrow \Delta EOC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $EO = EC = 1$;

5) $\angle DAE = 45° \Rightarrow \Delta ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $BE = AE = \sqrt{3}$;

6) ΔBEO - прямоугольный треугольник $\Rightarrow$ $BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

$BO^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow BO = 2.$

Ответ: 2.

8. На прямой $y = -15/2$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $30°$.

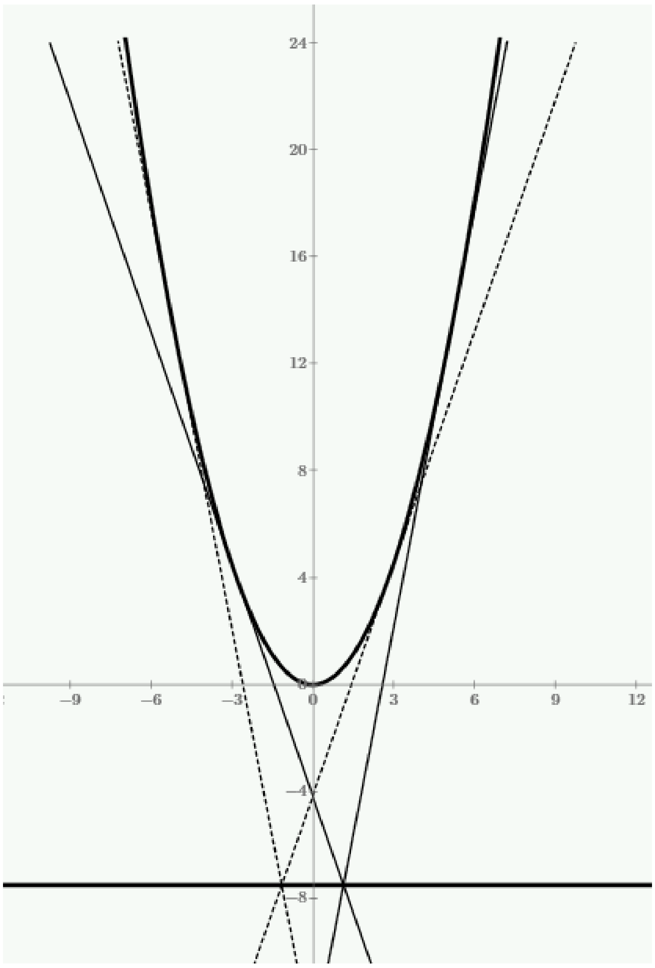
Решение:

(без применения производной)

$y = x^2/2$, $M(x_0; -15/2)$. Уравнение $\dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{15}{2} + k(x - x_0)$, или $x^2 - 2kx + 2kx_0 + 15 = 0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - 15 = 0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1), $k_1 \cdot k_2 = -15$ (3).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 30°,\ \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = 1/\sqrt{3}$ следует $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, или $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда, $k_2 - k_1 = -\dfrac{14}{\sqrt{3}}$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \dfrac{7}{\sqrt{3}},\ k_2 = x_0 - \dfrac{7}{\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \dfrac{49}{3} = -15,\ x_0^2 = \dfrac{4}{3},\ x_0 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. В силу симметрии оба значении подходят.



Ответ: $M\left(\pm 2/\sqrt{3}; -15/2\right)$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$\left(x-a\right)^2=18(y-x+a-4),\ \log_{(x/4)}\left(y/4\right)=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение: Второе уравнение равносильно системе: $x>0,\ \ x\ne 4,\ \ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=18(a-4)$, или $x^2-2ax+a^2-18a+72=0$ (*), у которого $D/4=a^2-a^2+18a-72=18(a-4)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=4$ квадратного уравнения может получиться, когда $(4-a)^2=18(a-4)$, т.е. если 1) $a=4$, уравнение имеет вид $\left(x-4\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $4-a=-18$, т.е. $a=22$, тогда для x получаем уравнение $\left(x-22\right)^2=18\cdot 18,\ \ x=22\pm 18$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=4$, есть еще один корень $x_2=40$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(40;40)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=18(a-4)=0, \\ a>0,\quad a\ne 4. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2-18a+72<0$, т.е. при $6<a<12\quad x=a+\sqrt{18(a-4)}$.

3. $a^2-18a+72=0$, отсюда $a=6$, $x^2-12x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=12$ удовлетворяет условиям, или $a=12$, $x^2-24x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=24$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2}=a\pm\sqrt{18(a-4)}$, если

$$\begin{cases} 18(a-4)>0, \\ a>0, \\ a^2-18a+72>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>4, \\ \left[\begin{array}{l} a<6, \\ a>12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<a<6, \\ a>12. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=22$.

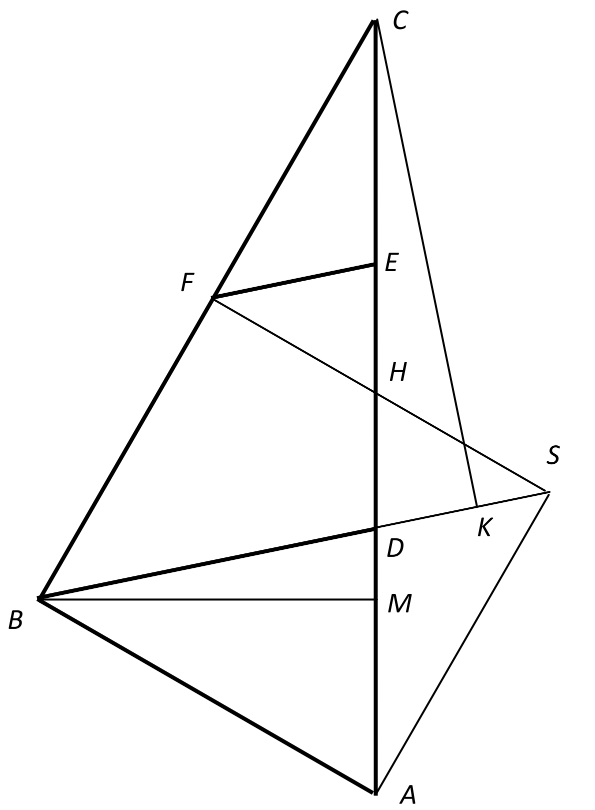
Объединяя найденные значения a, получим ответ.

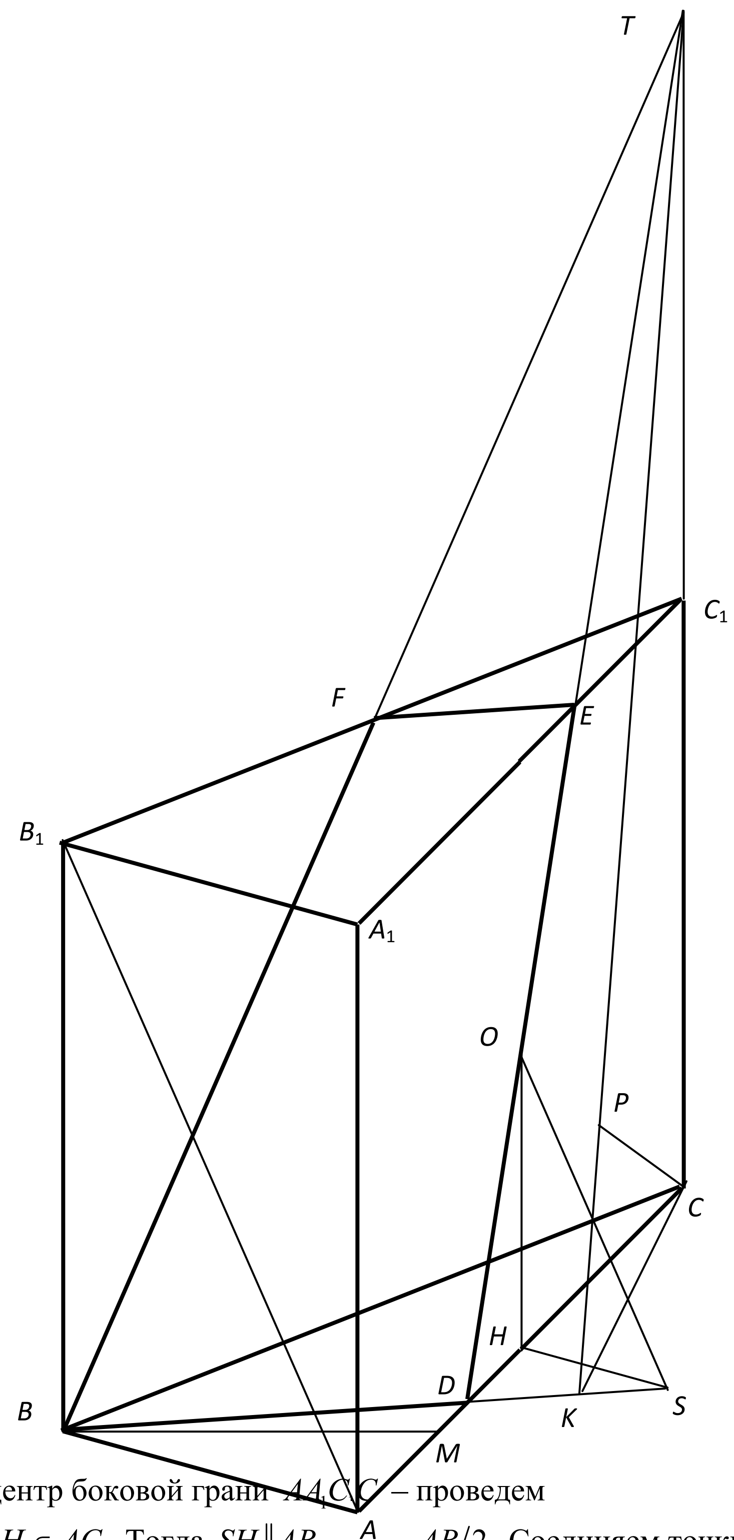
Ответ: $a\in\left(4;6\right)\cup\left(12;22\right)\cup\left(22;+\infty\right),\ \ x=y=a\pm\sqrt{18(a-4)}$;

$a\in\left[6;12\right]\cup\left\{22\right\},\ \ x=y=a+\sqrt{18(a-4)}$.

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно $12/5$, а гипотенуза основания призмы равна 4?

Решение:





Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS\|AB_1,\ S\in(ABC),\ OS=AB_1/2$ и $OH\parallel AA_1,\ H\in AC$. Тогда $SH\|AB,$ $AB/2$. Соединяем точки B и S, $D=BS\cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1; $T=(DO)\cap(CC_1)$, $E=DT\cap A_1C_1,\ F=BT\cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK$, $P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a$, $CP = d$.

Так как $\Delta HDS \sim \Delta ADB$ и $HS = AB/2$, $HD = AD/2 = a/6$; $EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE$, $BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET. Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\Delta BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$, $BD = \dfrac{2}{3}BS = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$. В треугольнике BDC

$CD = \dfrac{2}{3}a$, $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}$, $CK \cdot BD = BM \cdot CD$. Отсюда $CK = \dfrac{BM \cdot CD}{BD} = \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{6}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. В ΔCKT

$KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\dfrac{3}{7}a^2 - d^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}}$; $KT = \dfrac{CK^2}{KP} = \dfrac{3a^2}{7}\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \dfrac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

Площадь треугольника BDT $S_{\Delta BDT} = \dfrac{1}{2}BD \cdot KT = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \dfrac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \dfrac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

Площадь сечения $S_{BDEF} = \dfrac{3}{4} \cdot S_{\Delta BDT} = \dfrac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \dfrac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

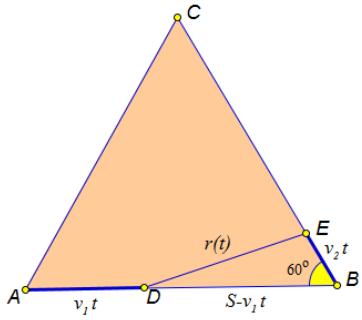
Для сведения: высота пирамиды $h = \dfrac{\sqrt{3}\,d}{2\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

Ответ:

$a = 4$, $d = \dfrac{12}{5}$, $S = \dfrac{3\cdot 16}{16\sqrt{3 - 7\cdot 9/25}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ $\qquad (h = 3)$.

Решение варианта №11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 $км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 $км/ч$. Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами.



Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем: $r^2 = (S-80t)^2 + (50t)^2 - 50t(S-80t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:

$$(r^2)' = -2\cdot 80(S-80t) + 2\cdot 2500t - 50(S-80t) + 80\cdot 50t = -210S + 2(6400+2500+4000)t = 0.$$

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 7$, то $-105S + (6400+2500+4000)\cdot 7 = 0$, и $S = 860$.

Ответ: 860 *км*.

2. Решите неравенство $\log_x(4x-3) > 2$.

Решение: $\log_x(4x-3) > 2$. ОДЗ: $x \in (3/4;1)\cup(1;+\infty)$. $\log_x \frac{x^2}{4x-3} < 0$.

1) $\begin{cases} 3/4 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{4x-3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3/4 < x < 1.$

2) $\begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \dfrac{x^2}{4x-3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$

Ответ: $x \in (3/4;1)\cup(1;3)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 157 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = 157$, или $b_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 157$. Так как 157 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13), то $b_1 = 1,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 157,$ или $b_1 = 157,\ 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 1.$ Второй случай не подходит. Следовательно, $b_1 = 1$, $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 156$, $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $n = 2$, то $q = 156$. Искомые числа: 1, 156.
2) Если $n = 3$, то $q^2 + q - 156 = 0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q = 12$. Искомые числа: 1, 12, 144.
3) Если $n \geq 4$, то $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2}) = 156$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3 \leq q^{n-1} \leq 156$, $q \leq 5$, причем q является делителем числа $156 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 4.
   1) Если $q = 2$, то $1+2+2^2+\dots+2^{n-2} = 78$, $2^{n-1} - 1 = 156$, или $2^{n-1} = 157$, уравнение не имеет натуральных решений.
   2) Если $q = 3$, то $1+3+3^2+\dots+3^{n-2} = 52$, $\dfrac{3^{n-1}-1}{2} = 52$, $3^{n-1} = 105$, уравнение не имеет натуральных решений.
   3) Если $q = 4$, то $1+4+4^2+\dots+4^{n-2} = 39$, $\dfrac{4^{n-1}-1}{3} = 39$, $4^{n-1} = 118$, уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: {157}, **{**1; 156} или **{**1; 12; 144}.

4. .Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^{15}3x\cos^2 5x} = \sin 5x$.

Решение:
При условии $\sin 5x \geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему: $\sin^4 5x + \cos^{15}3x\cos^2 5x - 1 = 0$, $(1-\cos^2 5x)^2 + \cos^{15}3x\cos^2 5x - 1 = 0$, $-2\cos^2 5x + \cos^4 5x + \cos^{15}3x\cos^2 5x = 0$, $\cos^2 5x(\cos^2 5x + \cos^{15}3x - 2) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 5x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in Z$, с учетом условия $\sin 5x \geq 0$ имеем $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$.

2) $\cos^2 5x + \cos^{15}3x - 2 = 0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 5x = 1, \\ \cos^{15}3x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi k, \\ 3x = 2\pi m, \end{cases}$ $k,\ m \in Z$. Следовательно, $3k = 10m$, $k, m \in Z$ $\Rightarrow m = 3s$, $k = 10s$, $s \in Z$ $\Rightarrow x = 2\pi s$, $s \in Z$, что удовлетворяет условию $\sin 5x \geq 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$, $x = 2\pi s$, $s \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$, $x = 2\pi s$, $s \in Z$.

5. Решите неравенство $\left(3^{x^2-1}-9\cdot 3^{5x+3}\right)\log_{\cos\pi x}(x^2-6x+9)\geq 0$.

Решение:

ОДЗ: $(x-3)^2>0,\quad \cos\pi x>0,\ \cos\pi x\neq 1,\ \Rightarrow\ x\in(-0{,}5+2k;\,2k)\cup(2k;\,0{,}5+2k)$, $k\in Z$.

Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему

$(x^2-5x-6)(\cos\pi x-1)(x^2-6x+8)\geq 0\ \Leftrightarrow\ (x-6)(x+1)(x-2)(x-4)\leq 0\ \Rightarrow$

$x\in[-1;\,2]\cup[4;\,6]$.

С учетом ОДЗ имеем $x\in(-0{,}5;\,0)\cup(0;\,0{,}5)\cup(1{,}5;\,2)\cup(4;\,4{,}5)\cup(5{,}5;\,6)$.

Ответ: $x\in(-0{,}5;\,0)\cup(0;\,0{,}5)\cup(1{,}5;\,2)\cup(4;\,4{,}5)\cup(5{,}5;\,6)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]$. (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6))=\cos(\pi+\arcsin 0{,}6)=-\cos(\arcsin 0{,}6)=-0{,}8$, то $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]=\left[-\operatorname{arctg}0{,}25;\,\operatorname{arctg}3\right]$. Следовательно, $2x\in\left[-2\operatorname{arctg}0{,}25;\,2\operatorname{arctg}3\right]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}0{,}25<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}0{,}25<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}0{,}25<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}3<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}3<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}3);1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}3)=-0{,}8$, и $\cos 2x\in[-0{,}8;1]$. Отсюда имеем $10\cos 2x+17\in[9;\,27]$, и $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)\in[\log_3 9;\,\log_3 27]=[2;\,3]$.

Отрезок $[2;\,3]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_3(10\cos 2x+17)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}0{,}25\right)\cos(\pi-\arcsin(-0{,}6));\,\operatorname{arctg}3\right]$.

Сумма целых чисел из отрезка $[2;3]$ равна 5.

Ответ: $E_f=[2;\,3]$, сумма целых чисел равна 5.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен $30°$, $EC=1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD.

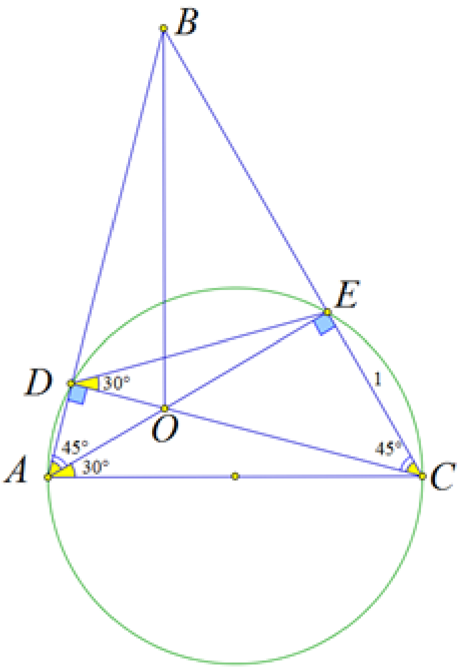
Решение:

1) $\angle EDC=\angle EAC=30°$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);
2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow \Delta AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC=90°$, $\angle ECA=60°$,

$AC=\dfrac{EC}{\sin 30°}=2,\quad AE=EC\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$;

3) $\angle ADC = 90°, \angle EDC = 30° \Rightarrow \angle BDE = 60° \Rightarrow \Delta DBE \approx \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BE}{AB} = k$,

$k^2 = \dfrac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow DE = \sqrt{2}$;



4) ΔDEC - теорема синусов: $\dfrac{DE}{\sin(\angle DCE)} = \dfrac{EC}{\sin 30°}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)} = 2 \Rightarrow \sin(\angle DCE) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\angle DCE = 45° \Rightarrow \Delta EOC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $EO = EC = 1$;

5) $\angle DAE = 45° \Rightarrow \Delta ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $BE = AE = \sqrt{3}$;

6) ΔBEO - прямоугольный треугольник $\Rightarrow$

$BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

$BO^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow BO = 2$.

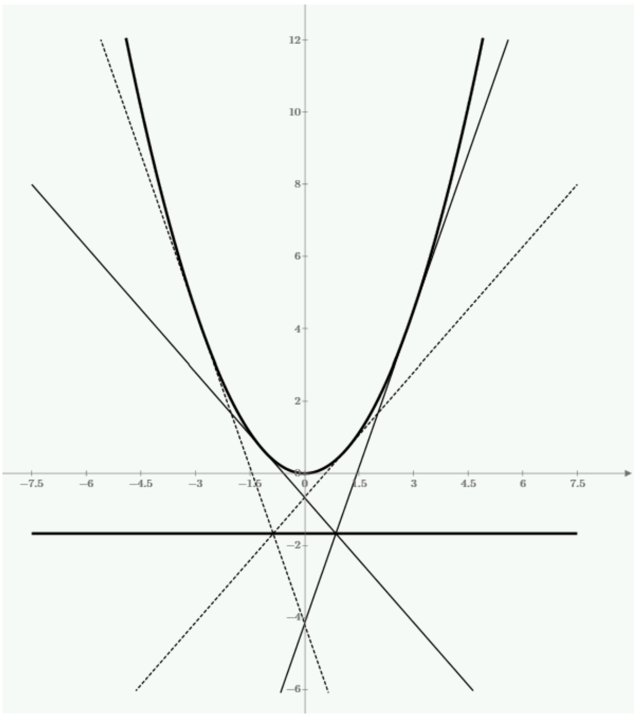
Ответ: 2.

8. На прямой $y = -5/3$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

$y = x^2/2$, $M(x_0; -5/3)$.

Уравнение $\dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{5}{3} + k(x - x_0)$, или $x^2 - 2kx + 2kx_0 + \dfrac{10}{3} = 0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - \dfrac{10}{3} = 0$.



Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1), $k_1 \cdot k_2 = -10/3$ (3).

Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60°$, $\mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует

$\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$.

Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}\left(1 - \dfrac{10}{3}\right)$,

$$k_2 - k_1 = -\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$, $k_2 = x_0 - \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \dfrac{49}{12} = -\dfrac{10}{3}$, $x_0^2 = \dfrac{3}{4}$, $x_0 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. В силу симметрии оба значении подходят.

Ответ: $M\left(\pm\sqrt{3}/2; -5/3\right)$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $\left(x-a\right)^2 = 16(y-x+a-3)$, $\log_{(x/3)}\left(y/3\right) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x>0,\ x\neq 3,\ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 16(a-3)$, или $x^2-2ax+a^2-16a+48=0$ (*), у которого $D/4 = a^2-a^2+16a-48 = 16(a-3)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=3$ квадратного уравнения может получиться, когда $(3-a)^2 = 16(a-3)$, т.е. если 1) $a=3$, уравнение имеет вид $\left(x-3\right)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3-a=-16$, т.е. $a=19$, тогда для x получаем уравнение $\left(x-19\right)^2 = 16\cdot 16,\ x = 19\pm 16$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=3$, есть еще один корень $x_2=35$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(35;35)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4 = 16(a-3) = 0, \\ a>0, \quad a\neq 3. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2-16a+48<0$, т.е. при $4<a<12 \quad x = a+4\sqrt{a-3}$.

3. $a^2-16a+48=0$, отсюда $a=4$, $x^2-8x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=8$ удовлетворяет условиям, или $a=12$, $x^2-24x=0$, $x_1=0$ –посторонний корень, $x_2=24$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a\pm 4\sqrt{a-3}$, если

$$\begin{cases} 16(a-3)>0, \\ a>0, \\ a^2-16a+48>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3, \\ \left[\begin{array}{l} a<4, \\ a>12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3<a<4, \\ a>12. \end{array}\right.$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=19$.

Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a \in (3;4) \cup (12;19) \cup (19;+\infty)$, $x = y = a \pm 4\sqrt{a-3}$;

$a \in [4;12] \cup \{19\}$, $x = y = a + 4\sqrt{a-3}$.

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \| AB_1$, $S \in (ABC)$, $OS = AB_1/2$ и $OH \parallel AA_1$, $H \in AC$. Тогда $SH \| AB$, $SH = AB/2$. Соединяем точки B и S, $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1$, $F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK$, $P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a$, $CP = d$.

Так как $\Delta HDS \sim \Delta ADB$ и $HS = AB/2$, $HD = AD/2 = a/6$; $EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE$, $BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET. Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\Delta BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, $BD = \frac{2}{3}BS = \frac{a\sqrt{7}}{6}$. В треугольнике BDC

$CD = \frac{2}{3}a$, $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$, $CK \cdot BD = BM \cdot CD$. Отсюда $CK = \frac{BM \cdot CD}{BD} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

В ΔCKT $KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{3}{7}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}}$;

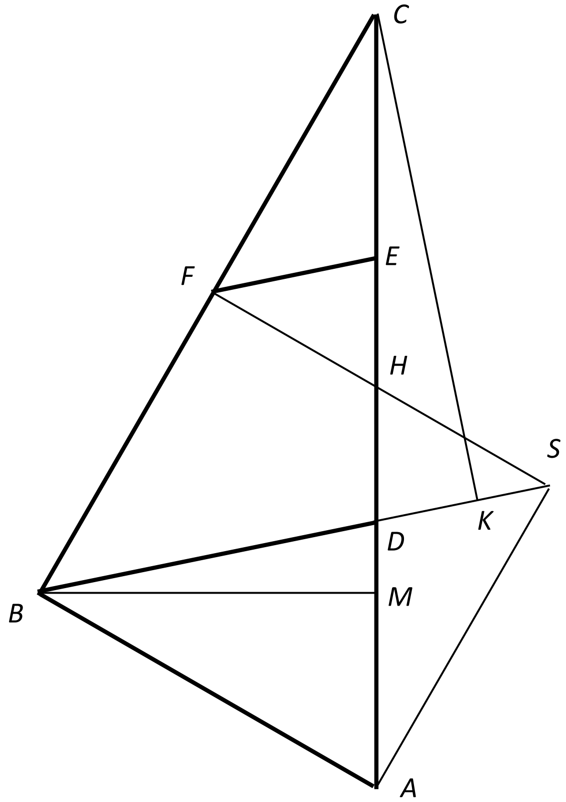
$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

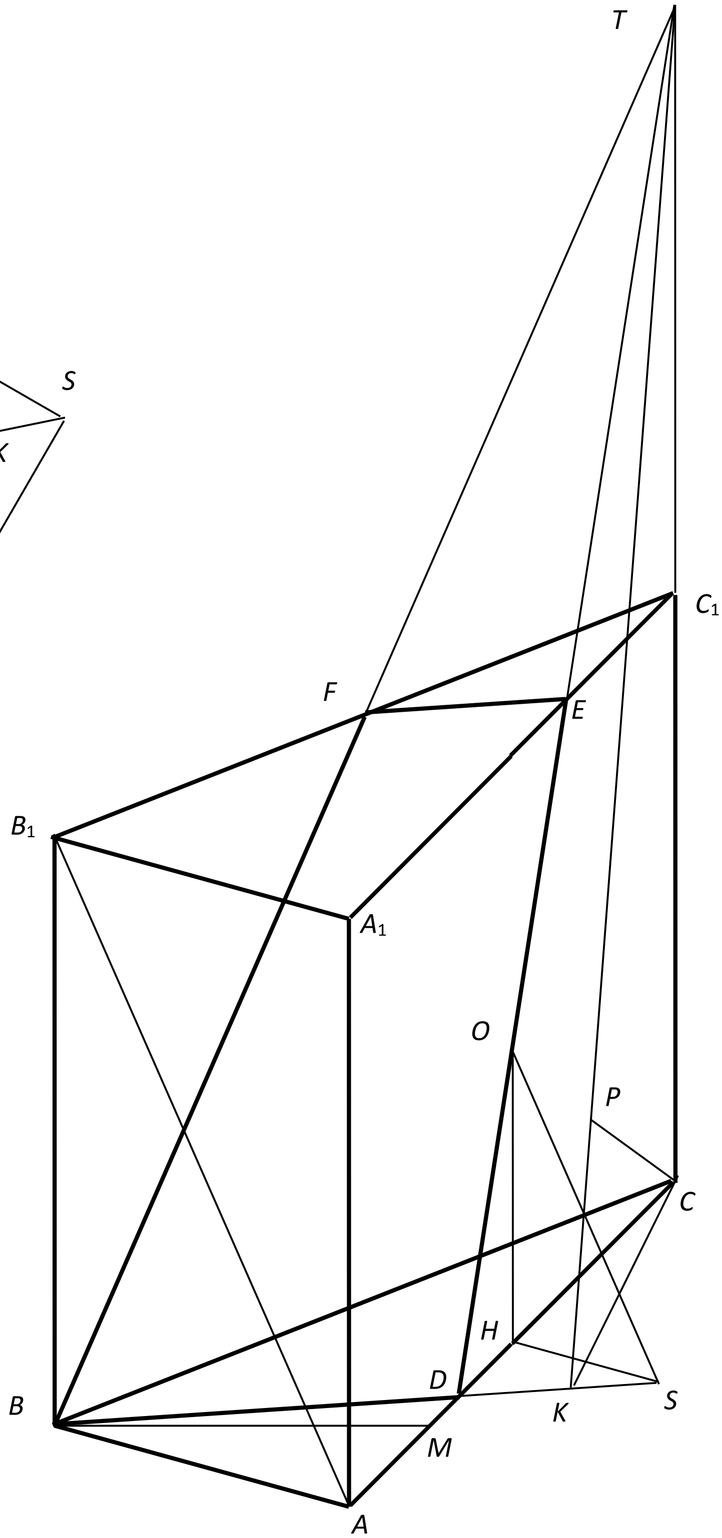
Площадь треугольника BDT $S_{\Delta BDT} = \frac{1}{2} BD \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

Площадь сечения $S_{BDEF} = \frac{3}{4} \cdot S_{\Delta BDT} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}$.

Для сведения: высота пирамиды $h = \frac{\sqrt{3}\,d}{2\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}$.

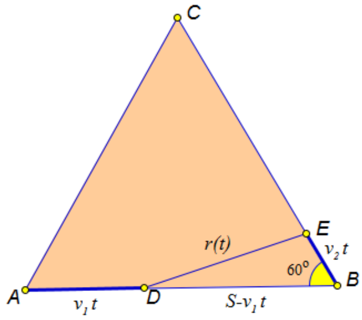
Ответы: $a = \sqrt{14}$, $d = 2$, $S = \frac{3 \cdot 14}{16\sqrt{3 - 7(4/14)}} = \frac{21}{8}$ $\quad (h = \sqrt{3})$.


C
E
F
H
S
K
D
B
M
A


T
C_1
F
E
B_1
A_1
O
P
C
H
D
B
K
S
M
A

Решение варианта №12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 90 $км/ч$, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 60 $км/ч$. Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)



Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем: $r^2 = (S - 90t)^2 + (60t)^2 - 60t(S - 90t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции $r^2 = r^2(t)$:

$(r^2)' = -2 \cdot 90(S - 90t) + 2 \cdot 3600t - 60(S - 90t) + 90 \cdot 60t = -240S + 2(8100 + 3600 + 5400)t = 0$.

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 2$, то $-120S + (8100 + 3600 + 5400) \cdot 2 = 0$, и $S = 285$.

Ответ: 285 *км*.

2. Решите неравенство $\log_x(5x-4) > 2$.

Решение: $\log_x(5x-4) > 2$. ОДЗ: $x \in (4/5;1) \cup (1;+\infty)$. $\log_x \dfrac{x^2}{5x-4} < 0$.

1) $\begin{cases} 4/5 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{5x-4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4/5 < x < 1.$

2) $\begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \dfrac{x^2}{5x-4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$

Ответ: $x \in (4/5;1) \cup (1;4)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 211 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = 211$, или $b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 211$. Так как 211 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13,17), то $b_1 = 1,\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = 211$ или $b_1 = 211,\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = 1$. Второй случай не подходит. Следовательно, $b_1 = 1,\ q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2}) = 210$, $q(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2}) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Рассмотрим следующие случаи.

1) Если $n=2,$ то $q=210$. Искомые числа: 1, 210.

2) Если $n=3,$ то $q^2+q-210=0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q=14$. Искомые числа: 1, 14, 196.

3) Если $n\ge 4,$ то $q(1+q+q^2+\dots+q^{n-2})=210$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3\le q^{n-1}\le 210$, $q\le 5$, причем q является делителем числа $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7.$ Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 5.

   1) Если $q=2,$ то $1+2+2^2+\dots+2^{n-2}=105,$ $2^{n=1}-1=105,$ или $2^{n=1}=106,$ уравнение не имеет натуральных решений.

   2) Если $q=3,$ то $1+3+3^2+\dots+3^{n-2}=70$ $\dfrac{3^{n-1}-1}{2}=70,$ $3^{n-1}=141,$ уравнение не имеет натуральных решений.

   3) Если $q=5,$ то $1+5+5^2+\dots+5^{n-2}=42,$ $\dfrac{5^{n-1}-1}{4}=42,$ $5^{n-1}=169,$ уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: {211}, **{**1; 210} или **{**1; 14; 196}.

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^7 15x\cos^2 9x}=\sin 9x$. (8 баллов)

Решение: При условии $\sin 9x\ge 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему:
$\sin^4 9x+\cos^7 15x\cos^2 9x-1=0$, $(1-\cos^2 9x)^2+\cos^7 15x\cos^2 9x-1=0$,
$-2\cos^2 9x+\cos^4 9x+\cos^7 15x\cos^2 9x=0$, $\cos^2 9x(\cos^2 9x+\cos^7 15x-2)=0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 9x=0$, $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{9},$ $n\in Z$, с учетом условия $\sin 9x\ge 0$ имеем $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{9},$ $n\in Z$.

2) $\cos^2 9x+\cos^7 15x-2=0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases}\cos^2 9x=1,\\ \cos^7 15x=1,\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}9x=\pi k,\\ 15x=2\pi m,\end{cases}$ $k,$ $m\in Z.$ Следовательно, $5k=6m,$ $k,m\in Z$ $\Rightarrow m=5s,$ $k=6s,$ $s\in Z$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\pi s}{3},$ $s\in Z$, что удовлетворяет условию $\sin 9x\ge 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{9},$ $n\in Z,$ $x=\dfrac{2\pi s}{3},$ $s\in Z.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2\pi n}{9},$ $n\in Z,$ $x=\dfrac{2\pi s}{3},$ $s\in Z.$

5. Решите неравенство $\left(2^{x^2-6}-4\cdot 2^{x+4}\right)\log_{\cos\pi x}(x^2-2x+1)\ge 0.$ (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $(x-1)^2>0,$ $\cos\pi x>0,$ $\cos\pi x\ne 1,$ $\Rightarrow$ $x\in(-0{,}5+2k;\,2k)\cup(2k;\,0{,}5+2k)$, $k\in Z$.
Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему
$(x^2-x-12)(\cos\pi x-1)(x^2-2x)\ge 0$ $\Leftrightarrow$ $(x-4)(x+3)(x-2)x\le 0$ $\Rightarrow$ $x\in[-3;\,0]\cup[2;\,4]$.
С учетом ОДЗ имеем $x\in(-2{,}5;-2)\cup(-2;-1{,}5)\cup(-0{,}5;\,0)\cup(2;\,2{,}5)\cup(3{,}5;\,4).$

Ответ: $x\in(-2{,}5;-2)\cup(-2;-1{,}5)\cup(-0{,}5;\,0)\cup(2;\,2{,}5)\cup(3{,}5;\,4).$

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}(1/3)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2\right]$. (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6))=\cos(\pi-\arcsin 0{,}6)=-\cos(\arcsin 0{,}6)=-0{,}8$, то $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}(1/3)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2\right]=\left[-\operatorname{arctg}(1/3);\ \operatorname{arctg}2\right]$. Следовательно, $2x\in\left[-2\operatorname{arctg}(1/3);\ 2\operatorname{arctg}2\right]$. Поскольку $0<\operatorname{arctg}(1/3)<\operatorname{arctg}1=\pi/4$, $0<2\operatorname{arctg}(1/3)<\pi/2$, $-\pi/2<-2\operatorname{arctg}(1/3)<0$, а также $\pi/4<\operatorname{arctg}2<\pi/2$, $\pi/2<2\operatorname{arctg}2<\pi$, то $\cos 2x\in[\cos(2\operatorname{arctg}2);1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаем $\cos(2\operatorname{arctg}2)=-0{,}6$, и $\cos 2x\in[-0{,}6;1]$. Отсюда имеем $5\cos 2x+11\in[8;16]$, и $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)\in[\log_2 8;\ \log_2 16]=[3;4]$.

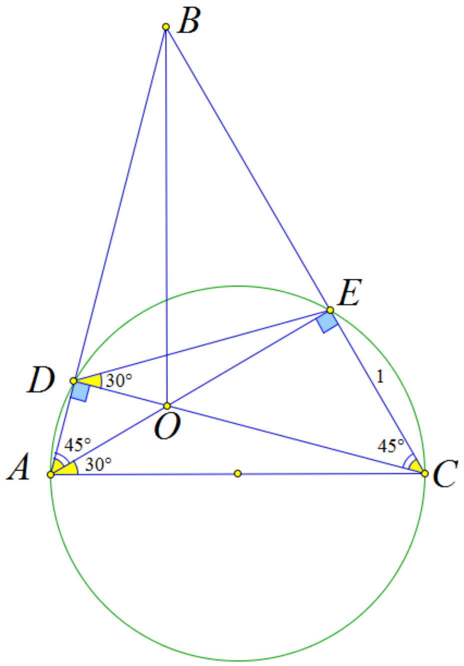
Отрезок $[3;4]$ является множеством значений функции $f(x)=\log_2(5\cos 2x+11)$ при $x\in\left[1{,}25\left(\operatorname{arctg}(1/3)\right)\cos(\pi+\arcsin(-0{,}6));\ \operatorname{arctg}2\right]$.

Сумма целых чисел из отрезка $[3;4]$ равна 7.

Ответ: $E_f=[3;4]$, сумма целых чисел равна 7.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен $30°$, площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO, если O — точка пересечения отрезков AE и CD.

Решение:



1) $\angle EDC=\angle EAC=30°$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);

2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow \Delta AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC=90°$, $\angle ECA=60°$,

$$AC=\frac{EC}{\sin 30°}=2EC,\quad AE=EC\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}EC;$$

$$S_{AEC}=\frac{AE\cdot EC}{2}=\frac{\sqrt{3}EC^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow EC=1,$$

$AC=2,\ AE=\sqrt{3}$;

3) $\angle ADC=90°,\ \angle EDC=30°\Rightarrow\angle BDE=60°\Rightarrow$

$$\Delta DBE\approx\Delta CBA\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}=k,$$

$$k^2=\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ DE=\sqrt{2};$$

4) ΔDEC - теорема синусов: $\dfrac{DE}{\sin(\angle DCE)}=\dfrac{EC}{\sin 30°}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)}=2\ \Rightarrow\ \sin(\angle DCE)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\angle DCE=45°\Rightarrow\Delta EOC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $EO=EC=1$;

5) $\angle DAE = 45° \Rightarrow \Delta ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник, $BE = AE = \sqrt{3}$;

6) ΔBEO - прямоугольный треугольник $\Rightarrow$ $BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$ $BO^2 = 3+1 = 4 \Rightarrow BO = 2.$

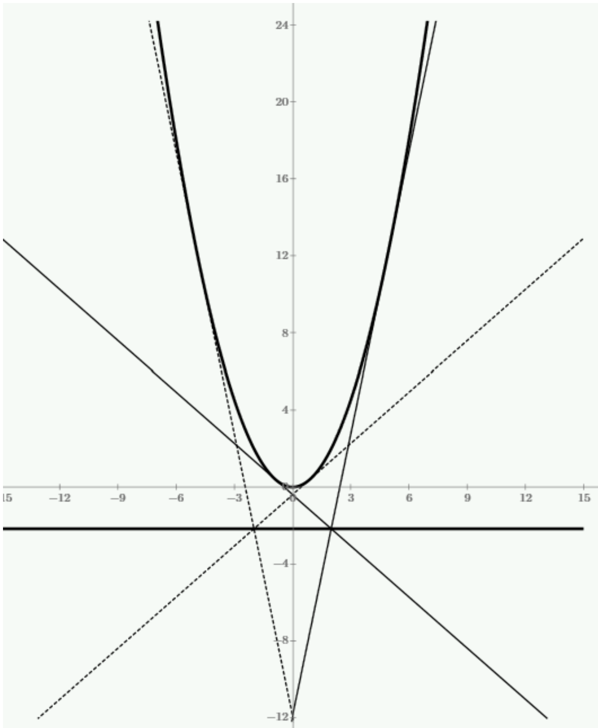
Ответ: 2.

8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен $60°$.

Решение (без применения производной).

$y = x^2/2$, $M(x_0; -13/6)$.

Уравнение $\dfrac{1}{2}x^2 = -\dfrac{13}{6} + k(x - x_0)$, или $x^2 - 2kx + 2kx_0 + \dfrac{13}{3} = 0$, имеет единственное решение, если $\dfrac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - \dfrac{13}{3} = 0$. Найденные из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1), $k_1 \cdot k_2 = -13/3$ (3).



Из условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 60°$, $\mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3}$ следует $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha_1} = \sqrt{3}$, или $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}$. Отсюда, $k_2 - k_1 = \sqrt{3}\left(1 - \dfrac{13}{3}\right)$, $k_2 - k_1 = -\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ (3).

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $k_2 = x_0 - \dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \dfrac{25}{3} = -\dfrac{13}{3}$, $x_0^2 = 4$, $x_0 = \pm 2$. В силу симметрии оба значении подходят.

Ответ: $M(\pm 2; -13/6)$.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}(y/2)=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x>0,\ x\neq 2,\ y=x$. Подставляя $y=x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2=9(a-2)$, или $x^2-2ax+a^2-9a+18=0$ (*), у которого $D/4=a^2-a^2+9a-18=9(a-2)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $(2-a)^2=9(a-2)$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $(x-2)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2-a=-9$, т.е. $a=11$, тогда для x получаем уравнение, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=20$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(20;20)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=9(a-2)=0, \\ a>0, \quad a\neq 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2-9a+18<0$, т.е. при $3<a<6 \quad x=a+3\sqrt{a-2}$.

3. $a^2-9a+18=0$, отсюда $a=3$, $x^2-6x=0$, $x_1=0$–посторонний корень, $x_2=6$ удовлетворяет условиям, или $a=6$, $x^2-12x=0$, $x_1=0$–посторонний корень, $x_2=12$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2}=a\pm 3\sqrt{a-2}$, если

$$\begin{cases} 9(a-2)>0, \\ a>0, \\ a^2-9a+18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ \left[\begin{array}{l} a<3, \\ a>6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<a<3, \\ a>6. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a=11$.

Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in(2;3)\cup(6;11)\cup(11;+\infty)$, $x=y=a\pm 3\sqrt{a-2}$;

$a\in[3;6]\cup\{11\}$, $x=y=a+3\sqrt{a-2}$.

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным $90°$, и углом C, равным $30°$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1, если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна 4?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \| AB_1,\ S \in (ABC),\ OS = AB_1/2$ и $OH \parallel AA_1,\ H \in AC$. Тогда $SH \| AB,\ SH = AB/2$. Соединяем точки B и S, $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1,\ F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK,\ P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a,\ CP = d$.

Так как $\Delta HDS \sim \Delta ADB$ и $HS = AB/2,\ HD = AD/2 = a/6;\ EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE,\ BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET. Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\Delta BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, $BD = \frac{2}{3}BS = \frac{a\sqrt{7}}{6}$. В треугольнике BDC

$CD = \frac{2}{3}a,\ BM = \frac{a\sqrt{3}}{2\cdot 2},\ CK \cdot BD = BM \cdot CD$. Отсюда $CK = \frac{BM \cdot CD}{BD} = \frac{2a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

В ΔCKT $KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{3}{7}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}}$;

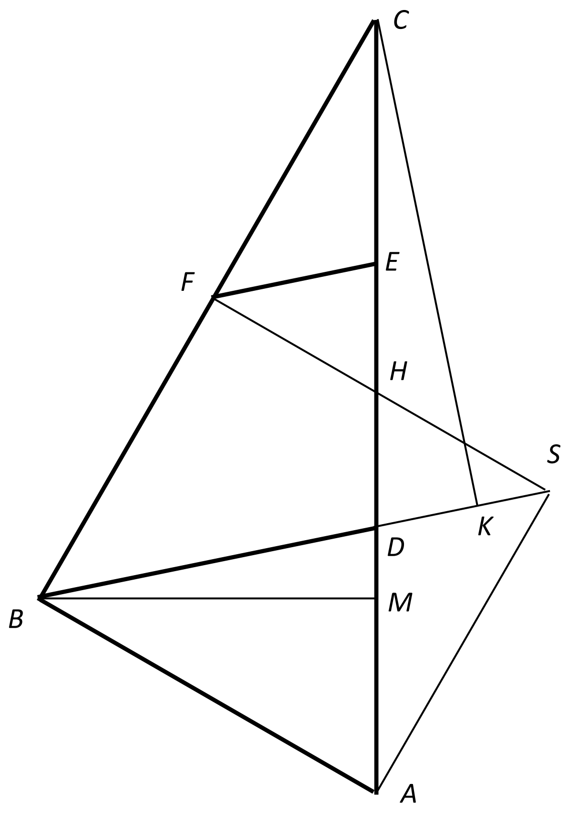
$$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

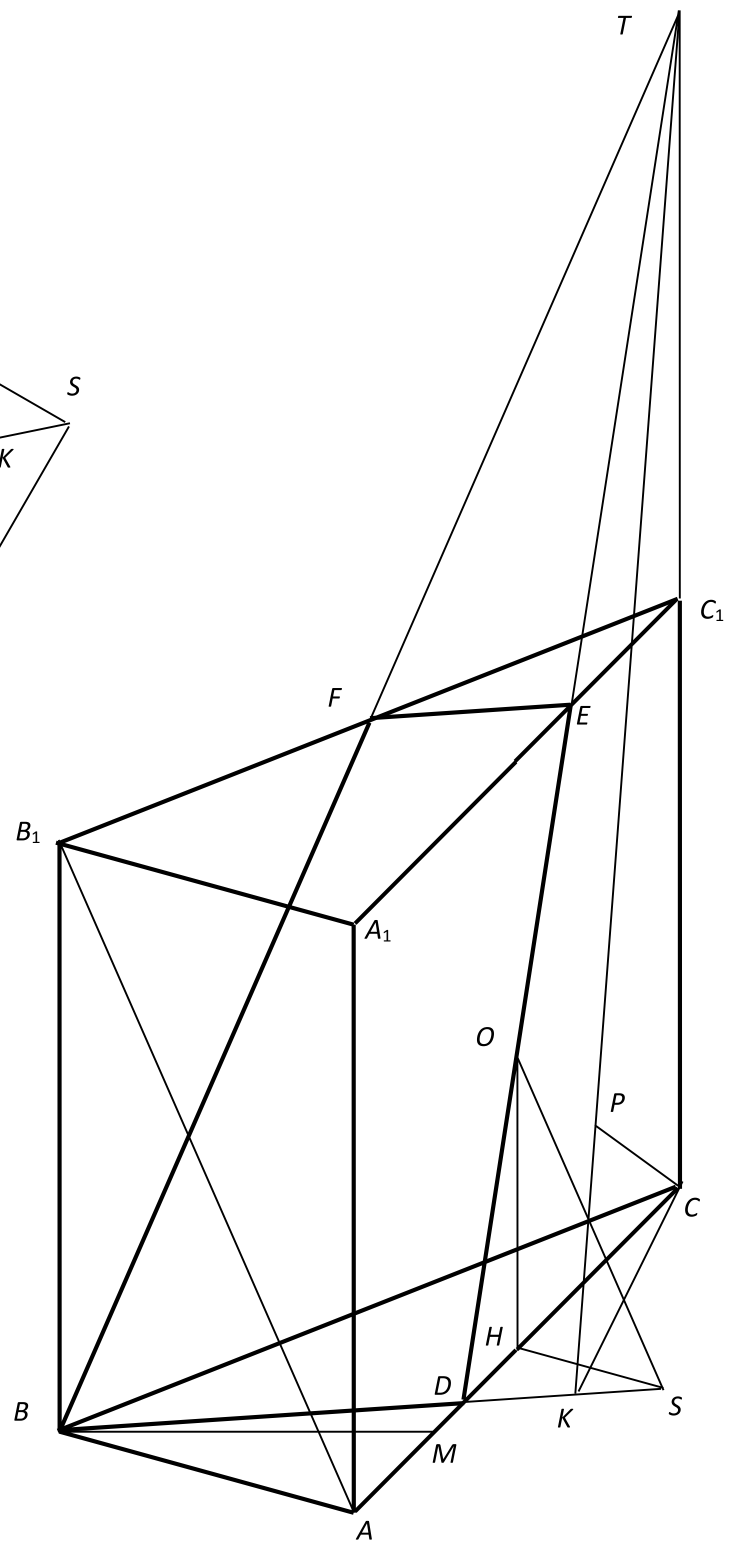
Площадь треугольника BDT $S_{\Delta BDT} = \frac{1}{2}BD \cdot KT = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}$.

Площадь сечения $S_{BDEF} = \frac{3}{4}\cdot S_{\Delta BDT} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

Для сведения: высота пирамиды $h = \frac{\sqrt{3}\,d}{2\sqrt{3 - 7\left(d/a\right)^2}}$.

Ответы: $a = 4,\ d = 2,\ S = \frac{3\cdot 16}{16\sqrt{3 - 7\left(4/16\right)}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\left(h = 2\sqrt{3/5}\right)$.


C
E
F
H
S
K
D
B
M
A


T
C_1
F
E
B_1
A_1
O
P
C
H
D
K
S
B
M
A