**Решение заданий 2 тура 10 класса олимпиады МГТУ «Шаг в будущее»**

**2014-2015 учебный год**

**Задание 1**( 1 вариант).

Сравните числа $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ и $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.

**Решение.**

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}<\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}<\left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{4}<\left(\frac{4}{5}\right)^{3} \Leftrightarrow \frac{81}{256}<\frac{64}{125} \Leftrightarrow \frac{81}{256}<\frac{81}{162}=\frac{64}{128}<\frac{64}{125}.$$

**Ответ:** $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}<\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.

**Задание 1**( 2 вариант).

Сравните числа $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

**Решение.** $\sqrt{\frac{2}{3}}<\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}<\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2} \Leftrightarrow \frac{8}{27}<\frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{8}{27}<\frac{8}{19}<\frac{9}{16}$.

**Ответ:** $\sqrt{\frac{2}{3}}<\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

**Задание 2**( 1 вариант).

Пусть $\{a_n\}$- арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\left(\left(\frac{1}{a_{2015}}+\frac{1}{a_{1580}}\right):\left(\frac{1}{a_{2015}}-\frac{1}{a_{1580}}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{\dfrac{1}{a_{2014}}+\dfrac{1}{a_{1581}}}{\dfrac{1}{a_{2014}}-\dfrac{1}{a_{1581}}}$$

**Решение.**

$$\left(\left(\frac{1}{a_{2015}}+\frac{1}{a_{1580}}\right):\left(\frac{1}{a_{2015}}-\frac{1}{a_{1580}}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{\dfrac{1}{a_{2014}}+\dfrac{1}{a_{1581}}}{\dfrac{1}{a_{2014}}-\dfrac{1}{a_{1581}}}=$$

$$=\left(\frac{a_{1580}+a_{2015}}{a_{1580}\cdot a_{2015}}:\frac{a_{1580}-a_{2015}}{a_{1580}\cdot a_{2015}}\right)^{-1}\cdot\frac{\dfrac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}\cdot a_{2014}}}{\dfrac{a_{1581}-a_{2014}}{a_{1581}\cdot a_{2014}}}=$$

$$=\left(\frac{a_{1580}+a_{2015}}{a_{1580}-a_{2015}}\right)^{-1}\cdot\frac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}-a_{2014}}=\frac{a_{1580}-a_{2015}}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}-a_{2014}}=$$

$$=\frac{(a_1+1579d)-(a_1+2014d)}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1580}+d+a_{2015}-d}{(a_1+1580d)-(a_1+2013d)}=$$

$$=\frac{1579d-2014d}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1580}+a_{2015}}{1580d-2013d}=\frac{-435d}{-433d}=\frac{435}{433}$$

**Ответ:** $\frac{435}{433}$.

**Задание 2**( 2 вариант).

Пусть $\{a_n\}$- арифметическая прогрессия, вычислите значение выражения (если оно определено)

$$\frac{\frac{1}{a_{2015}}-\frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}}+\frac{1}{a_{1580}}}:\left(\left(\frac{1}{a_{2014}}+\frac{1}{a_{1581}}\right):\left(\frac{1}{a_{2014}}-\frac{1}{a_{1581}}\right)\right)^{-1}$$

**Решение.**

$$\frac{\frac{1}{a_{2015}}-\frac{1}{a_{1580}}}{\frac{1}{a_{2015}}+\frac{1}{a_{1580}}}:\left(\left(\frac{1}{a_{2014}}+\frac{1}{a_{1581}}\right):\left(\frac{1}{a_{2014}}-\frac{1}{a_{1581}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\frac{a_{1580}-a_{2015}}{a_{1580}\cdot a_{2015}}}{\frac{a_{1580}+a_{2015}}{a_{1580}\cdot a_{2015}}}:\left(\frac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}\cdot a_{2014}}:\frac{a_{1581}-a_{2014}}{a_{1581}\cdot a_{2014}}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{a_{1580}-a_{2015}}{a_{1580}+a_{2015}}:\left(\frac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}-a_{2014}}\right)^{-1}=\frac{a_{1580}-a_{2015}}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1581}+a_{2014}}{a_{1581}-a_{2014}}=$$

$$=\frac{(a_1+1579d)-(a_1+2014d)}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1580}+d+a_{2015}-d}{(a_1+1580d)-(a_1+2013d)}=$$

$$=\frac{1579d-2014d}{a_{1580}+a_{2015}}\cdot\frac{a_{1580}+a_{2015}}{1580d-2013d}=\frac{-435d}{-433d}=\frac{435}{433}$$

**Ответ:** $\frac{435}{433}$.

**Задание 3**( 1 вариант).

Лицеист сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Чертановская и насчитал 30 ступенек. На станции он увидел завуча лицея, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

**Решение.**

При движении вниз лицеист насчитал меньше ступеней, чем при движении вверх,следовательно, эскалатор движется вниз.

Пусть $n$ - число ступеней у неподвижного эскалатора,

$x\left(\frac{ступеней}{минута}\right)$- скорость движения лицеиста относительно эскалатора,

$y\left(\frac{ступеней}{минута}\right)$- скорость движения эскалатора,

$t_1(мин)$- время движения вниз,

$t_2(мин)$- время движения вверх, тогда

$$\begin{cases} xt_1 = 30 = n - yt_1 \\ xt_2 = 150 = n + yt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{30}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ x = \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{t_1} = \frac{150}{t_2} \\ \frac{30}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 5t_1 \\ \frac{30}{t_1} + \frac{150}{t_2} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{5t_1} \Rightarrow 6n = 300 \Leftrightarrow n = 50$$

**Ответ:** 50.

**Задание 3**( 2 вариант).

Бауманец сбежал вниз по движущемуся эскалатору станции метро Бауманская и насчитал 40 ступенек. На станции он вспомнил, что забыл в Университете курсовую работу, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 280 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

**Решение.**

При движении вниз бауманец насчитал меньше ступеней, чем при движении вверх, следовательно, эскалатор движется вниз.

Пусть $n$ - число ступеней у неподвижного эскалатора,

$x\left(\frac{ступеней}{минута}\right)$ - скорость движения бауманца относительно эскалатора,

$y\left(\frac{ступеней}{минута}\right)$ - скорость движения эскалатора,

$t_1(мин)$ - время движения вниз,

$t_2(мин)$ - время движения вверх, тогда

$$\begin{cases} xt_1 = 40 = n - yt_1 \\ xt_2 = 280 = n + yt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{40}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ x = \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{40}{t_1} = \frac{280}{t_2} \\ \frac{40}{t_1} = \frac{n}{t_1} - y \\ \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 7t_1 \\ \frac{40}{t_1} + \frac{280}{t_2} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{80}{t_1} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{7t_1} \Rightarrow 8n = 560 \Leftrightarrow n = 70$$

**Ответ:** 70.

**Задание 4**(1 вариант). Решите уравнение $\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23$.

**Решение.**

$$\frac{2|\cos x|}{\cos x} = x^2 - 10x + 23 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0 \\ x^2 - 10x + 21 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ x^2 - 10x + 25 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0 \\ x = 7;3 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ x = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7.$$

**Ответ:** 7.

**Задание 4**(2 вариант) Решите уравнение $\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14$.

**Решение.**

$$\frac{2|\sin x|}{\sin x} = 8x - x^2 - 14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ x = 2;6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 6.$$

**Ответ:** 6.

**Задание 5**(1 вариант) Найдите все целые числа *x* и *y*, удовлетворяющие уравнению $\left(2y-2x-3633\right)\left(1580^{x^2}+x^2+x+3\right)=1580$.

**Решение.** Произведение двух целых чисел равно 1580 – четному числу. Выражение в первой скобке – нечетное число. Значит, выражение во второй скобке должно быть четным числом. Запишем $1580^{x^2}+x^2+x+3=1580^{x^2}+x(x+1)+3$. Выражение $x(x+1)$ - четное, $x(x+1)+3$- нечетное, значит, $1580^{x^2}$ должно быть нечетным. Это возможно в единственном случае при $x=0$. Подставляем найденное значение *x*, получим уравнение $\left(2y-3633\right)4=1580$, откуда $y=2014$.

**Ответ:** $x=0$, $y=2014$.

**Задание 5** (2 вариант) Найдите все целые числа *x* и *y*, удовлетворяющие уравнению $\left(2y+2x+3023\right)\left(1580^{x^2}+x^2-x-3\right)=2014$.

**Решение.** Аналогично решению 1 варианта, $x=0$. Подставляем найденное значение *x*, получим уравнение $\left(2y+3023\right)(-2)=2014$, откуда $y=-2015$.

**Ответ:** $x=0$,.

**Задание 6** (1 вариант) Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left(x^2+2x+\left(a+3\right)\right)^2=a^2x^2$ имеет три различных корня.

**Решение.** Преобразуем данное уравнение как разность квадратов.

$$\left(x^2+2x+\left(a+3\right)\right)^2=a^2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+\left(a+3\right)=ax \\ x^2+2x+\left(a+3\right)=-ax \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+\left(2-a\right)x+\left(a+3\right)=0 \ (1) \\ x^2+\left(2+a\right)x+\left(a+3\right)=0 \ (2) \end{array}\right.$$

Исходное уравнение имеет три различных корня в 3-х случаях: а) если уравнения (1) и (2) имеют по два различных корня, из которых один общий; б) уравнение (1) имеет два различных корня, уравнение (2) имеет единственный корень и у уравнений нет общих корней; в) уравнение (2) имеет два различных корня, уравнение (1) имеет единственный корень и у уравнений нет общих корней.

Рассмотрим случай а): $x^2+\left(2-a\right)x+\left(a+3\right)=x^2+\left(2+a\right)x+\left(a+3\right)=0 \Leftrightarrow ax=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Подставим $a=0$. Имеем $\left[\begin{array}{l} x^2+2x+3=0 \\ x^2+2x+3=0 \end{array}\right.$. Полученные уравнения корней не имеют, значит, $a=0$ не подходит.

Подставим $x=0$. Имеем $a=-3$, откуда $\left[\begin{array}{l} x^2+5x=0 \\ x^2-x=0 \end{array}\right.$. Данная система имеет три различных корня, значит, $a=-3$ подходит.

Рассмотрим случаи б) и в): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D(1)>0 \\ D(2)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} D(2)>0 \\ D(1)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-8a-8>0 \\ a^2-8=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-8>0 \\ a^2-8a-8=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\sqrt{8} \\ a=4+2\sqrt{6} \end{array}\right.$

**Ответ:** $-3$; $-\sqrt{8}$; $4+2\sqrt{6}$.

**Задание 6** (2 вариант) Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left(x^2+3x+(a+4)\right)^2=a^2x^2$ имеет три различных корня.

**Решение.** Аналогично решению варианта 1, имеем

$$\left(x^2+3x+(a+4)\right)^2=a^2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+(3-a)x+(a+4)=0 \ (1) \\ x^2+(3+a)x+(a+4)=0 \ (2) \end{array}\right.$$

В случае а) имеем, либо $a=0$, либо $x=0$. При $a=0$ уравнения не имеют решений, при $x=0$ получаем, что $a=-4$, при котором совокупность $\left[\begin{array}{l} x^2+7x=0 \\ x^2-x=0 \end{array}\right.$ имеет три различных решения.

В случаях б) и в) имеем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-10a-7>0 \\ a^2+2a-7=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+2a-7>0 \\ a^2-10a-7=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5+4\sqrt{2} \\ a=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

**Ответ:** $-4$; $-1-2\sqrt{2}$; $5+4\sqrt{2}$.

**Задание 7**( 1 вариант).

Решите уравнение $|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+...+|x-10|+|x+10|=20x$.

**Решение.**

Левая часть уравнения может принимать только неотрицательные значения

$$\Rightarrow 20x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \ge 1 > 0 \\ x+2 \ge 2 > 0 \\ \ldots \\ x+10 \ge 10 > 0 \end{cases}$$ тогда уравнение примет вид

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+10)=20x$$

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|+10x+55=20x$$

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|=10x-55 \quad \Rightarrow 10x-55 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x-5 \ge 0{,}5 > 0 \\ \ldots \\ x-1 \ge 4{,}5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x-1)+(x-2)+\ldots+(x-5)+|x-6|+|x-7|+\ldots+|x-10|=10x-55$$

$$5x-15+|x-6|+|x-7|+\ldots+|x-10|=10x-55$$

$$|x-6|+|x-7|+\ldots+|x-10|=5x-40 \quad \Rightarrow 5x-40 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 8 \Rightarrow \begin{cases} x-6 \ge 2 > 0 \\ x-7 \ge 1 > 0 \Rightarrow \\ x-8 \ge 0 \end{cases}$$

$$(x-6)+(x-7)+(x-8)+|x-9|+|x-10|=5x-40$$

$$3x-21+|x-9|+|x-10|=5x-40$$

$$|x-9|+|x-10|=2x-19 \quad \Rightarrow 2x-19 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 9{,}5 \Rightarrow x-9 \ge 0{,}5 > 0$$

$$x-9+|x-10|=2x-19$$

$$|x-10|=x-10 \Rightarrow x \ge 10$$

**Ответ:** $[10;+\infty)$.

**Задание 7**( 2 вариант).

Решите уравнение $|x+1|+|x-1|+|x+2|+|x-2|+\ldots+|x+10|+|x-10|=-20x$.

**Решение.**

Левая часть уравнения может принимать только неотрицательные значения

$$\Rightarrow -20x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \le -1 < 0 \\ x-2 \le -2 < 0 \\ \ldots \\ x-10 \le -10 < 0 \end{cases}$$ тогда уравнение примет вид

$$|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+10|-(x-1)-(x-2)-\ldots-(x-10)=-20x$$

$$|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+10|-10x+55=-20x$$

$$|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+10|=-10x-55 \Rightarrow -10x-55\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\leq -5{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x+5\leq -0{,}5<0 \\ \ldots \\ x+1\leq -4{,}5<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-(x+1)-(x+2)-\ldots-(x+5)+|x+6|+|x+7|+\ldots+|x+10|=-10x-55$$

$$-5x-15+|x+6|+|x+7|+\ldots+|x+10|=-10x-55$$

$$|x+6|+|x+7|+\ldots+|x+10|=-5x-40 \Rightarrow -5x-40\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -8 \Rightarrow \begin{cases} x+6\leq -2<0 \\ x+7\leq -1<0 \\ x+8\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-(x+6)-(x+7)-(x+8)+|x+9|+|x+10|=-5x-40$$

$$-3x-21+|x+9|+|x+10|=-5x-40$$

$$|x+9|+|x+10|=-2x-19 \quad \Rightarrow -2x-19\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -9{,}5 \Rightarrow x+9\leq -0{,}5<0$$

$$-(x+9)+|x+10|=-2x-19$$

$$|x+10|=-x-10 \Rightarrow x+10\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -10$$

**Ответ:** $(-\infty;-10]$.

**Задание 8** (1 вариант).

Найдите сумму корней уравнения $f^3(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=8x^3+\frac{2}{x}$, где $f(x)=3x^3-x$.

**Решение.**

Рассмотрим функцию $g(x)=f^3(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)-8x^3-\frac{2}{x}$, тогда корни исходного уравнения – корни уравнения $g(x)=0$.

Исследуем функцию $g$ на четность:

1. $D(g)=R\setminus\{0\}$ - симметрична относительно 0

2. $f(-x)=3(-x)^3-(-x)=-3x^3+x=-(3x^3-x)=-f(x)$

$$g(-x)=f^3(-x)+f\left(\frac{1}{-x}\right)-8(-x)^3-\frac{2}{-x}=-f^3(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+8x^3+\frac{2}{x}=-g(x)$$

Следовательно, $g$ - нечетная функция $\Rightarrow$ если $x_0$ - корень исходного уравнения, то $-x_0$ также является корнем уравнения $\Rightarrow$ сумма корней равна нулю, если корни существуют

Проверим $x=1$: $f(1)=3\cdot 1^3-1=2$, $f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)=2$, подставляем в исходное уравнение:10=10 -верно $\Rightarrow x=1$ - корень $\Rightarrow$корни существуют

**Ответ:** 0.

**Задание 8** (2 вариант).

Найдите сумму корней уравнения $g^3(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=5x^3+\frac{1}{x}$, где $g(x)=x^3+x$.

**Решение.**

Рассмотрим функцию $f(x)=g^3(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)-5x^3-\frac{1}{x}$, тогда корни исходного уравнения – корни уравнения $f(x)=0$.

Исследуем функцию $f$ на четность:

1. $D(f)=R\setminus\{0\}$ - симметрична относительно 0
2. $g(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-g(x)$

$$f(-x)=g^3(-x)-g\left(\frac{1}{-x}\right)-5(-x)^3-\frac{1}{-x}=-g^3(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)+5x^3+\frac{1}{x}=-f(x)$$

Следовательно, $f$ - нечетная функция $\Rightarrow$если $x_0$ - корень исходного уравнения, то $-x_0$ также является корнем уравнения $\Rightarrow$сумма корней равна нулю, если корни существуют

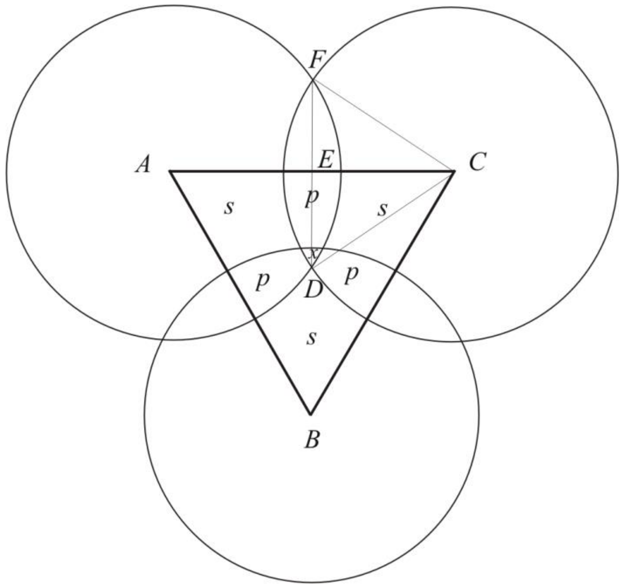
Проверим $x=1$: $g(1)=1^3+1=2$, $g\left(\frac{1}{1}\right)=g(1)=2$, подставляем в исходное уравнение: 6=6 - верно $\Rightarrow x=1$ - корень $\Rightarrow$корни существуют

**Ответ:** 0.

**Задание 9** (1 вариант). В каждой вершине равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{10}$ построили окружности радиуса $\sqrt{5}$, внутренние области которых закрасили серой, бурой и малиновой краской. Найдите площадь серо-буро-малиновой области.

Решение. В силу симметрии, площади фигур, образованных при пересечении окружностей и треугольника, равны. Площадь всего треугольника равна $3s+3p+x=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($a$-сторона треугольника), площадь сектора с углом $60^\circ$ равна $s+2p+x=\frac{\pi R^2}{6}=\frac{5\pi}{6}$ ($R$-радиус окружности). Из прямоугольного треугольника $DEC$ имеем

$DE=\sqrt{DC^2-EC^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=EC$.



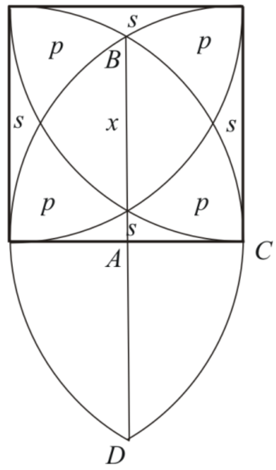

Следовательно, треугольник $DEC$ – равнобедренный и $\angle DCE=45^\circ$, значит, $\angle DCF=90^\circ$и площадь сектора $DCF$ равна $S_{сект\,DCF}=\frac{\pi R^2}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Поскольку площадь треугольника $DCF$ равна $S_{DCF}=\frac{1}{2}DF\cdot EC=\frac{5}{2}$, то площадь сегмента с дугой $DF$ равна $S_{сегм}=\frac{5\pi}{4}-\frac{5}{2}$.

Таким образом, имеем систему уравнений $\begin{cases}3s+3p+x=\frac{5\sqrt{3}}{2}\\ s+2p+x=\frac{5\pi}{6}\\ p+x=\frac{5\pi}{4}-\frac{5}{2}\end{cases}$, решая которую, находим, что $x=\frac{5\pi}{4}-\frac{15}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}-\frac{15}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

**Задание 9** (2 вариант). В каждой вершине квадрата со стороной $\sqrt{6}$построили окружности радиуса $\sqrt{6}$, внутренние области которых закрасили разными цветами: серым, бурым, малиновым и в крапинку. Найдите площадь области, закрашенной всеми четырьмя цветами.




**Решение.** Площадь квадрата равна $4s+4p+x=R^2=6$($R$-радиус окружности), площадь сектора с углом $90^\circ$равна $2s+3p+x=\frac{\pi R^2}{4}=\frac{3\pi}{2}$.

Площадь сегмента с дугой $BD$ равна площади сектора с дугой $BD$ без площади треугольника $BCD$, значит, $x+2p+s=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{1}{2}BD\cdot AC$, откуда (учитывая, что для треугольника $ABC$ выполнено $AC=\frac{1}{2}BC$)

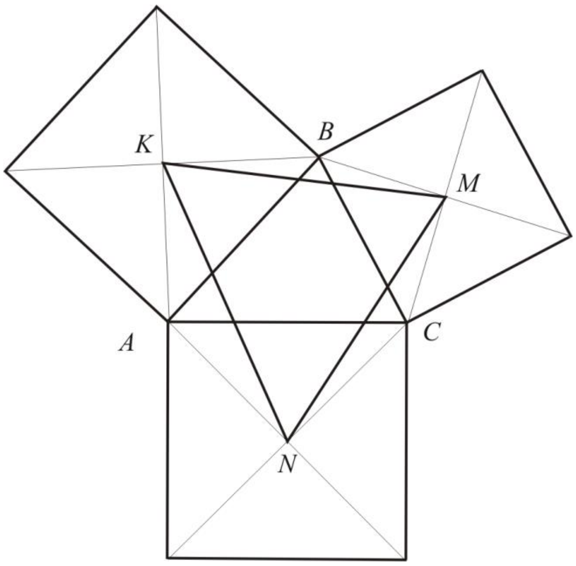
$x+2p+s=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} 4s+4p+x=6 \\ 2s+3p+x=\frac{3\pi}{2} \\ x+2p+s=2\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, решая которую, находим, что $x=2\pi-6\sqrt{3}+6$.

Ответ: $2\pi-6\sqrt{3}+6$.

**Задание 10** (1 вариант). Дан треугольник со сторонами $2\sqrt{13}, 2\sqrt{5}, 8$. На его сторонах во внешнюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Решение. Пусть $ABC$ данный треугольник и $AB=2\sqrt{13}$, $BC=2\sqrt{5}$, $AC=8$. Пусть $K$, $M$, $N$ соответственно центры квадратов, построенных на сторонах $AB$, $BC$, $AC$.




Тогда, по теореме косинусов для треугольников $AKN$ (учитывая, что диагонали квадрата образуют со сторонами угол $45^\circ$ и $AK=\frac{AB}{\sqrt{2}}$, $AN=\frac{AC}{\sqrt{2}}$) получаем

$$KN^2=AK^2+AN^2-2AK\cdot AN\cdot\cos\left(\angle A+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=AK^2+AN^2+2AK\cdot AN\cdot\sin\angle A=$$

$$=\frac{AB^2}{2}+\frac{AC^2}{2}+AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=\frac{AB^2}{2}+\frac{AC^2}{2}+2S_{ABC}.$$

Аналогично, для треугольников $BKM$, $CMN$ получаем $KM^2=\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}+2S_{ABC}$ и $NM^2=\frac{AC^2}{2}+\frac{BC^2}{2}+2S_{ABC}$.

Найдем площадь треугольника $ABC$. Можно вычислить эту площадь, предварительно найдя высоту треугольника (высота равна 4), или воспользоваться формулой Герона, получим $S_{ABC}=16$.

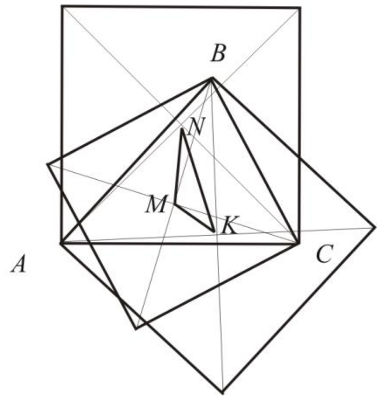
Подставляем числовые значения, находим, $KN^2 = 90$, $KM^2 = 68$, $NM^2 = 74$.

По формуле Герона для площади треугольника через квадраты его сторон имеем $S_{KMN} = \frac{1}{4}\sqrt{4KM^2 \cdot MN^2 - \left(KM^2 + MN^2 - KN^2\right)^2} = 33$.

Ответ: $33$.

**Задание 10** (2 вариант). Дан треугольник со сторонами $2\sqrt{13}, 2\sqrt{5}, 8$. На его сторонах во внутреннюю сторону построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.

Решение. Пусть $ABC$ данный треугольник и $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $AC = 8$. Пусть $K$, $M$, $N$ соответственно центры квадратов, построенных на сторонах $AB$, $BC$, $AC$.




Тогда, по теореме косинусов для треугольников $AKN$ (учитывая, что диагонали квадрата образуют со сторонами угол $45^\circ$ и $AK = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, $AN = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ ) получаем

$$KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - (\angle A - \frac{\pi}{4})\right) =$$

$$= AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \sin\angle A =$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - 2S_{ABC}.$$

Аналогично, для треугольников $BKM$, $CMN$ получаем $KM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - 2S_{ABC}$ и $NM^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - 2S_{ABC}$.

Найдем площадь треугольника $ABC$. Можно вычислить эту площадь, предварительно найдя высоту треугольника (высота равна 4), или воспользоваться формулой Герона, получим $S_{ABC} = 16$.

Подставляем числовые значения, находим, $KN^2 = 26$, $KM^2 = 4$, $NM^2 = 10$.

По формуле Герона для площади треугольника через квадраты его сторон имеем $S_{KMN} = \frac{1}{4}\sqrt{4KM^2 \cdot MN^2 - \left(KM^2 + MN^2 - KN^2\right)^2} = 1$.

Ответ: $1$.

**Критерии проверки заданий 10-го класса**

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Баллы** | 8 | 8 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 12 | 12 | **100** |

Задача 1.

| Баллы | |
|---|---|
| 8 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 7 | Обоснование недостаточно четкое |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 2.

| Баллы | |
|---|---|
| 8 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 6 | Решение содержит арифметическую ошибку |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 3.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 8 | Решение содержит арифметическую ошибку |
| 4 | Верно составлена система уравнений |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 4.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 8 | Корни квадратных уравнений найдены верно, отбор корней сделан верно только в одной системе |
| 5 | Модуль раскрыт верно, корни квадратных уравнений найдены верно, ошибка при отборе корней |
| 2 | Верно раскрыт модуль |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 5.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 8 | Арифметическая ошибка в решении или недостатки в обосновании |

| | |
|---|---|
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 6.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 8 | Все случаи рассмотрены, решение содержит арифметическую ошибку или ошибку на последнем этапе решения |
| 6 | Не сделана проверка в случае существования общего корня |
| 4 | Не рассмотрен случай существования общего корня |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 7.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 8 | Решение содержит арифметическую ошибку |
| 2 | Решение верно начато, раскрыта часть модулей |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 8.

| | |
|---|---|
| 10 | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 8 | Не сделана проверка существования корней уравнения |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 9.

| | |
|---|---|
| 12 | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 10 | Решение содержит арифметическую ошибку |
| 6 | Получена итоговая система уравнений, решение содержит ошибки в преобразованиях или не закончено |
| 4 | Получены некоторые верные промежуточные результаты |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |

Задача 10.

| | |
|---|---|
| 12 | Обоснованно получен правильный ответ |
| 10 | Решение содержит арифметическую ошибку |
| 8 | Верно получены значения сторон искомого треугольника |
| 4 | Стороны искомого треугольника выражены через элементы данного треугольника |
| 0 | Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям. |