



Утверждаю
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

А.А.Александров

2011 г.

**Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников
«Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «математика»
Типовой вариант задания**

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)
2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)
3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\operatorname{ctg} 6x\sqrt{2 \sin 2x + 1} = \operatorname{ctg} 10x\sqrt{2 \sin 2x + 1}$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $\frac{(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)(x - 1)}{\sqrt{x} - 1} > 0$. (10 баллов)
6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,2}(4 - \log_6 x) + \log_{0,2}(6 + \log_6 x)$. (10 баллов)
7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A , равным $\arccos 0,6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD , соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$. (12 баллов)
8. На кривой $y = (x + 2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2x - 1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. (12 баллов)
9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases} y + |y| = 4\sqrt{x} \\ a(y - 3) = x - 2 \end{cases}$ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a . (12 баллов)
10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA . Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду плоскость, проходящая через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельная медиане TD боковой грани ATB , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно 1. (12 баллов)